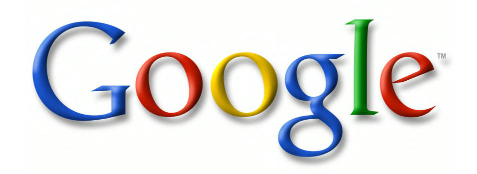


HANDBUCH
DER ELEMENTARMATHEMATIK
FÜR LEHRER

VON

PROF. DR. K. SCHWERING
DIREKTOR DES GYMNASIUMS AN DER APOSTELKIRCHE IN CÖLN A. RH.

MIT 193 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorwort.

Vorliegendes Buch will der Schule dienen. Wer auf höheren Lehranstalten unterrichtet, kommt sehr häufig in die Lage, zu wissenschaftlichen Fragen Stellung nehmen zu müssen. Die Antworten auf diese Fragen liegen allerdings in den meisten Fällen seit Jahrtausenden bereit; aber unter diesen Fragen sind doch auch einige, deren zutreffende Beantwortung erst im neunzehnten Jahrhundert ermöglicht ist. Diese Entwicklung der Wissenschaft ist für den Unterricht von nachhaltiger Einwirkung gewesen. Zwar muß der Lehrer darauf verzichten, die wissenschaftlichen Fragen selbst in der Schule zu behandeln. Dafür fehlt die Zeit, und für die Durchschnittsbegabung jugendlicher Geister fehlt jenes Maß abstrakten Denkens, ohne welches entlegene Fragen kaum verstanden, geschweige zur Beantwortung geführt werden können. Dennoch kann die endgültige Klarheit, welche beispielsweise das Parallelenaxiom nunmehr gewonnen hat, nicht ohne tiefgreifende Wirkung für den Unterricht bleiben. Wir werden die Einführung der Parallelentheorie nicht in den ersten Anfangsunterricht drängen, sondern solchen Sätzen und Aufgaben den Vortritt lassen, welche ohne das Parallelenaxiom begründet werden; Trugbeweise werden wir meiden und vor allem das Axiom in der einen oder andern Form geben und nicht mit Dingen Zeit verlieren, die nun einmal für die Schule unerreichbar sind. Wir haben mit dem Parallelenaxiom begonnen, weil dies zu den überraschendsten Folgerungen geführt und unsere Raumanschauungen bis in die tiefsten Wurzeln neuen Auffassungen zugänglich gemacht hat. Die Grundlagen der Arithmetik hätten wir mit demselben Recht heranziehen und darauf hinweisen können, wie die Mengenlehre und der Zahlbegriff durch die verdienstvollen Forschungen der Neuzeit in einer Umbildung begriffen sind, die auf die Gestaltung des Unterrichts nicht ohne Einfluß bleiben kann.

Vorliegendes Handbuch erhebt nicht den Anspruch, die vorhin angedeuteten Fragen einer neuen wissenschaftlichen Behandlung zu unterziehen. Diese Aufgabe scheint mir durch die vortreffliche Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber-Wellstein ebenso gründlich wie für die nächste Zeit abschließend gelöst.

Wissenschaftliche Fragen, die zwar aus der Schulmathematik stammen, deren Beantwortung aber in ersichtlicher Weise aus der Schulmathematik herausführt und sie nicht weiter beeinflussen kann, blieben von der Behandlung ausgeschlossen. Wenn aber die Antwort entweder eine schulmäßig einfache Form erlangen kann oder wenn sie zudem den Lehrstoff in eine Höhe rückt, die weitere Überschau gestattet, dann ist die Antwort in möglichst umfassender Weise gegeben.

In diesem Sinne sind beispielsweise die Grundlagen der Arithmetik einer Darstellung unterzogen, welche in aller Strenge die Permanenz der formalen Gesetze als leitendes Gesetz durchführt, aber nachdrücklich auf begleitende Anschauungsbilder hinweist, welche den Unterricht namentlich auf unteren Klassen zu beleben geeignet sind. Die irrationale Zahl ist einmal als nicht durch einen Bruch ganzer Zahlen darstellbar gewissermaßen von der negativen Seite her eingeführt; dann ist ihre Einordnung in die Zahlenreihe durch den Dedekindschen Schnitt vollzogen und endlich ist der Versuch gemacht, die quadratische Irrationalität gegenüber höheren Bereichen als eine festumschriebene und deutlich erkennbare Zahlengattung herauszuheben. Dieser Schritt ist für die beiden berühmten Probleme der Würfelverdopplung und Winkeldreiteilung entscheidend. Das Beweisverfahren selbst ist in seinen Grundlinien angedeutet; dagegen ist jede sich bietende Gelegenheit benutzt, um durch quadratische Gleichungen Näherungslösungen höherer Aufgaben zu erzielen. Dadurch wird nach Ansicht des Verfassers dem Unmöglichkeitsbeweise eine bedeutsame Ergänzung hinzugefügt, die zugleich im Sinne der Faßlichkeit den Unterricht günstig beeinflussen kann. Im übrigen muß auf die Darstellung der Moivreschen Gleichung, die Lösung der Gleichung $x^n = 1$, die Behandlung des binomischen Lehrsatzes, der elementaren Kreisberechnung, des sphärischen Kosinussatzes usw. verwiesen werden.

In der Geometrie mußte von vornherein auf die Angabe der in jedem Schulbuch stehenden Sätze und ausführlichen Beweis dieser Sätze verzichtet werden. Solche Dinge pflegt man in einem höheren Zwecken dienenden Buche nur dann zu suchen, wenn besondere Gründe vorliegen. Der Verfasser hat solche Gründe dann als gegeben erachtet, wenn ein Satz grundlegende Bedeutung hat und zu andern Sätzen in wichtiger Beziehung steht. Besondere Sorgfalt ist der logischen Gliederung gewidmet und für wichtige Sätze das logische Gefüge der Umkehrung ausdrücklich angegeben.

Weil das Buch sich nicht an Anfänger, sondern an Geübtere wendet und besonders dem Lehrer dienen will, sind an jeder Stelle diejenigen Hülfsmittel verwendet, welche am meisten geeignet er-

schienen. Der Verfasser war indes bemüht, stets an die allgemeinsten Grundlagen anzuknüpfen und auf Verwendung von Verlegenheitswörtern wie „bekanntlich“ und „offenbar“ grundsätzlich und gründlich zu verzichten.

Auch inhaltlich glaubt der Verfasser an manchen Stellen Neues geboten zu haben. Bei dem Umfange, den die elementarer Behandlung zugänglichen Teile der Mathematik angenommen haben, ist nicht geringe Vorsicht geboten, wenn man auf so vieldurchforschtem Gebiete den Anspruch des Fundrechts erhebt. Ich möchte dieser Vorsicht bezüglich der Tetraeder, deren Gegenkanten gleiche Summe oder Differenz haben und des einfachen Satzes, welcher S. 358 gegeben wird, hiermit entsagen. Im übrigen ist diese Schrift dem eingangs angegebenen Zwecke dienstbar. Und wenn es gelungen sein sollte, zu längst bekannten Zielen neue, bequemere Zugänge eröffnet oder bereits begangene Pfade geebnet zu haben, so ist damit der Schule und der Wissenschaft zugleich gedient.

Cöln, den 24. Juli 1907.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Arithmetik.

Zweiter Teil.

Planimetrie.

Dritter Teil.

Trigonometrie.

Erster Abschnitt: **Goniometrie.**

Zweiter Abschnitt: **Dreiecksberechnung.**

Vierter Teil.

Stereometrie.

Erster Teil.

Arithmetik.

§ 1. Einleitung.

Wenn wir die Dinge der Außenwelt ins Auge fassen, so bemerken wir, daß sie in einigen Eigenschaften übereinstimmen, in andern nicht. Indem wir die Merkmale zusammenstellen, in welchen Übereinstimmung stattfindet, gelangen wir zum Begriff eines Dinges, etwa Haus, Baum, Pferd, Mensch. Indem wir nun die Einzeldinge eines Begriffes vergleichen, z. B. die an einer Landstraße stehenden Bäume, bemerken wir noch gewisse Verschiedenheiten an Stamm, Rinde, Blättern usw., die für die Aufstellung des Begriffes unwesentlich sind. Daher sehen wir von diesen Unterschieden ab und betrachten jene Bäume in dieser Hinsicht als gleich. Dann steht aber doch noch jeder Baum den übrigen als verschieden gegenüber und diese Verschiedenheit bezeichnen wir durch Einheit und Mehrheit. Auch die Sprachen bringen diesen Unterschied deutlich durch besondere Wortformen zum Ausdruck. Sofort schließt sich die Aufgabe an, auch die Mehrheiten miteinander zu vergleichen. Sobald die Mehrheit, oder wie wir jetzt sagen wollen, die Menge der Einzeldinge ein gewisses Maß übersteigt, haben wir das Gefühl der Unklarheit, welches seinen Grund in einer Unvollkommenheit des menschlichen Erkennens hat. Wir können diesem Mangel durch Vergleichung abhelfen wie folgt. Seien zwei Mengen A und B gegeben. Wir greifen ein Einzelding aus A heraus und ordnen es einem beliebigen Einzelding aus B zu. Diesen Vorgang wiederholen wir so lange es geht. Es wird so lange gehen als noch in beiden Mengen unverbundene Einzeldinge vorhanden sind. Sobald die Einzeldinge einer der Mengen, etwa von A alle erschöpft sind, ist das Verfahren beendet und nun tritt von zwei Möglichkeiten eine ein. Entweder sind die Einzeldinge von B auch gleichzeitig erschöpft oder es sind in B noch überschüssige Einheiten vorhanden. Im ersteren Falle sind die beiden Mengen einander gleich, im letzteren ist die Menge B größer als A. Bemerken wir, daß wir drei einander ausschließende Fälle festgestellt haben, von denen immer einer stattfindet. Wir wollen sie der Kürze wegen gleich in mathematischen Zeichen niederschreiben:

$$1)\ A < B, \quad 2)\ A = B, \quad 3)\ A > B.$$

Wir haben also Menge und die Vergleichung zweier Mengen erklärt und befinden uns im Besitze eines Mittels, zwei beliebige Mengen zu vergleichen. Wie nun im Verkehrsleben sich der Tausch zweier Werte als erstes, aber unbequemes Mittel ergibt, so müssen wir uns auch bezüglich der Mengenvergleichung nach einem Mittel umsehen, welches dieses Geschäft in einfachster Weise vollzieht und daher die Rolle des Geldes im Wertumsatz spielen kann. Dieses Mittel ist die Zahl. Die Sprache hat die Zahlwörter, die Schrift die Zahlzeichen. Zahlwörter und Zahlzeichen sind Mengen von einfachstem Bau. Indem wir die Einzeldinge einer gegebenen Menge der Reihe nach mit den Zahlwörtern begleiten, zählen wir sie. Dadurch helfen wir der Unklarheit im Erfassen einer Menge ab und erhalten nicht bloß eine unübertreffliche Klarheit bezüglich der gegebenen Menge, sondern auch bezüglich ihrer Größe im Vergleich zu allen jemals in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft der Zählung unterziehbaren Mengen. Die Zahl ersetzt daher dem menschlichen Erkennen jene Unvollkommenheit, welche ihm im unmittelbaren Erfassen der Vielheit anhaftet.

Insofern die Zahl Ausdruck für die in den Dingen liegende Vielheit und selbst Vielheit ist, kann sie durch unser Denken nicht beeinflußt werden. In dieser Hinsicht folgt sie Gesetzen, welche wir erkennen, aber durch unser Denken nicht abändern können. Um dies an einem Beispiel zu zeigen, gilt für je zwei Zahlen a und b das oben entwickelte Gesetz: es ist entweder $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$. Ist $a = b$ und $a = c$, so ist auch $b = c$. Ist $a > b$, $b > c$, so ist $a > c$. Dagegen gilt für die Zahlwörter und Zahlzeichen, daß sie auch anders sein könnten und zwar nicht bloß nach ihrem äußeren Ausdruck, sondern auch nach ihrem innern Bau. Statt des Dezimalsystems, welches in den Sprachen wiederklingt, hätte mit gleichem Erfolge ein anderes gewählt werden können.

Die indische Zahlenschrift hat sich erst langsam die Herrschaft über weit unbequemere Bezeichnungen erobern müssen. Diese Zahlenschrift ist nun sogar der Sprache überlegen. Das zeigt sich nicht nur bei der Schwierigkeit, eine vielstellige Zahl zu lesen, d. h. die Zahlenschrift in ein Zahlwort umzusetzen, sondern auch beim Lesen der Dezimalbrüche und beim Telephonanruf vierstelliger Nummern.

§ 2. Die Addition.

Indem wir die Schreibung der Zahlen nach dezimalem Gefüge und die Zahlenbezeichnung durch Buchstaben als bekannt voraussetzen, beginnen wir sofort mit der einfachsten Rechnungsart, dem Addieren.

Addieren heißt, von einer gegebenen Zahl, dem Augendus an um soviel Einheiten weiter zählen als eine andere Zahl, der Addendus angibt.

Das Verfahren der Addition hat seinen Ursprung in der Aufgabe, zwei gegebene Mengen zu einer einzigen zu vereinigen und das Größenverhältnis der neuentstandenen Menge zu den früheren zu bestimmen. Dementsprechend hat die Betrachtung der Addition unter dem Bilde von zwei zu einer Gesamtmenge vereinigten Teilmengen große Bedeutung für Unterrichtszwecke. Ist a der Augend, b der Addend, so zählen wir mit $a + 1$ anfangend aufwärts, bis wir zur Zahl $a + b$ gelangen. Dies ist zugleich die Erklärung des Zeichens $a + b$. Wenn wir b zum Augend machen und von $b + 1$ anfangend um a weiter zählen, so gelangen wir zu der Zahl $b + a$. Die Zahl $a + b$ ist gleich $b + a$.

Zum Beweise nehmen wir an, es seien zwei Teilmengen gegeben, die eine mit der Stückzahl a, die andere mit der Stückzahl b. Wir vereinigen die beiden Mengen zu einer Gesamtmenge, ohne ein Stück der Mengen zu unterdrücken oder beizufügen. Dann ordnen wir den Stücken der Gesamtmenge die Zahlen zu und zwar so, daß wir zuerst die a Stücke der ersten Menge mit den Zahlen 1 bis a begleiten und dann die Stücke der zweiten Menge den auf a folgenden Zahlen zuordnen bis alle Stücke erschöpft sind. Die so gewonnene Zahl nennen wir $a + b$, nämlich diejenige Zahl, welche dem letzten Stücke aus der zweiten Menge zukommt. Nunmehr ordnen wir die Stücke der Gesamtmenge den Zahlen so zu, daß wir zuerst die b Stücke der zweiten Menge mit den Zahlen von 1 bis b begleiten und die Stücke der ersten Menge dann den auf b folgenden Zahlen zuordnen bis alle Stücke erschöpft sind. Die so gewonnene Zahl müssen wir $b + a$ nennen. Hieraus schließen wir

$$a + b = b + a. \tag{1}$$

Der Schluß geschieht unter Anwendung des Grundsatzes:

Ordnet man einer bestimmten gegebenen Menge die Zahlen von 1 anfangend zu und gelangt nach Erschöpfung aller Stücke der Menge zur Zahl m, so gelangt man bei beliebiger Abänderung der Zuordnung immer zu der Zahl m. Oder: Die Anzahl der gezählten Dinge ist unabhängig von der Art der Zählung.

Man kann zweifeln, ob diesem Satze die Bedeutung eines Grundsatzes zukommt. Nehmen wir an, es seien nur zwei Dinge zu zählen, etwa die zwei Buchstaben α, β. Dann sind nur zwei Zuordnungen, d. h. Arten der Zählung möglich, nämlich α ist 1, β ist 2 oder β ist 1, α ist 2. Das ist richtig, wie jeder einsieht, welcher ver-

standen hat, was gemeint ist. Aber solche Erkenntnisse nennen wir eben Grundsätze. Sind drei Stücke gegeben, etwa die drei Buchstaben α, β, γ, so sind sechs verschiedene Weisen möglich, die drei Stücke zu zählen. Die Betrachtung dieser Möglichkeiten werden wir an einer viel späteren Stelle vornehmen. Sie trägt nichts dazu bei, die Gewißheit zu erhöhen, daß man bei jeder Abzählung der Stücke α, β, γ immer 3 erhält. Die gleiche Einwendung ist gegenüber einem Beweise durch den Schluß von n auf $n + 1$ zu machen.

Dagegen kann man der hier erkannten Wahrheit eine andere Form geben. Die drei Buchstaben α, β, γ bilden eine Menge, ebenso die drei Zahlen 1, 2, 3. Nun erweisen sich die Mengen in der Zuordnung α zu 1; β zu 2; γ zu 3 als gleich und daraus ergibt sich, daß sie auch in jeder andern Zuordnung gleich sein müssen. Daher kann man unserm Grundsatz im Anschluß an die Mengenvergleichung S. 2 auch folgende Form geben: Erweisen sich zwei Mengen in irgend einer beliebigen Zuordnung der Stücke als gleich, so sind sie in jeder Zuordnung gleich.

Wenn wir den Begriff der Addition auf die Zahlen selbst anwenden, so erscheint jede als Summe der vorhergehenden und 1. Hiernach können wir unter Voraussetzung der Einheit und der Addition die übrigen Zahlen erklären. Die Einheit (Eins) ist diejenige Zahl, mit welcher die Zählung einer Menge beginnt. Die Einheit ist hiernach unter dem einen Gesichtspunkte Gegensatz, unter dem andern besonderer Fall der Mehrheit. Diese nicht so sehr mathematische als philosophische Schwierigkeit hat schon die Altpythagoräer beschäftigt und bis in das 16. Jahrhundert hinein die Geister beunruhigt. Vgl. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik I, 154.

Es seien drei Mengen gegeben, deren Stückzahl a, b, c seien. Wir vereinigen sie zu einer Gesamtmenge und zählen zuerst die Stücke a, wodurch wir zur Zahl a gelangen. Dann zählen wir, die Stücke b mit den folgenden Zahlen begleitend, wodurch wir zur Zahl $a + b$ gelangen. Hierauf zählen wir weiter, indem wir die Stücke c mit den folgenden Zahlen verbinden. Das Ergebnis dieser Zählung bezeichnen wir durch $(a + b) + c$. Hätten wir zuerst die Stücke a gezählt, dann die Stücke $b + c$ vereinigt und gezählt, so würden wir das Ergebnis $a + (b + c)$ erhalten haben. Es ist hiernach klar, was $b + (a + c)$, $(a + c) + b$, $c + (a + b)$, $(b + c) + a$ bedeuten. Die so gewonnenen Zahlen sind alle einander gleich. Denn es sind immer dieselben Stücke mit Zahlen verbunden worden und nur die Art der Zuordnung war verschieden.

Das Beweisverfahren läßt sich von drei Mengen sofort auf be-

liebig viele ausdehnen. Der Begriff der Addition hat hiernach eine Verschiebung erhalten und wir sprechen ihn nunmehr folgendermaßen aus:

Addieren heißt, die Anzahl einer Gesamtmenge bestimmen, welche aus Teilmengen besteht, deren Anzahlen gegeben sind. Die Anzahlen der Teilmengen heißen Summanden oder Posten. Die Anzahlen einzelner vereinigter Teilmengen heißen Untersummen. Die Anzahl der Gesamtmenge heißt Hauptsumme oder Summe.

Erstes Additionsgesetz in Zeichen $a + b = b + a$, in Worten: Augend und Addend können vertauscht werden, ohne daß sich das Ergebnis der Addition ändert.

Zweites Additionsgesetz in Zeichen: $(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$; in Worten: Bei Ausführung der Addition ist man berechtigt, beliebige Summanden zu Untersummen zu vereinigen.

Umgekehrt sind wir berechtigt, eine gegebene Menge in Teilmengen zu zerlegen, oder wie wir jetzt durchweg stillschweigend tun werden: wir sind berechtigt, eine Zahl in verschiedenartiger Weise zu zerlegen. Die Zahl 3 besitzt nur zwei Zerlegungen: $2 + 1$ und $1 + 2$. Die erste ist die Erklärung der Zahl 3, die zweite folgt dem ersten Additionsgesetz. 4 hat drei Zerlegungen: $3 + 1$, $2 + 2$, $1 + 3$. Die Gleichheit $3 + 1 = 2 + 2$ folgt aus dem zweiten Additionsgesetz, indem man 3 durch $2 + 1$ ersetzt und dann in $(2 + 1) + 1$ die Zusammenfassung $2 + (1 + 1)$ vornimmt. Die Summen $1 + 2$, $1 + 3, \ldots, 1 + 9$, $2 + 3$, $2 + 4, \ldots, 2 + 9$ usw. bis $8 + 9$ werden mit ihren Ergebnissen beim ersten Rechenunterricht gedächtnismäßig eingeprägt. Daher ist der Satz $5 + 7 = 12$ einerseits eine logische, durch Begriffszergliederung gebildete Folge des Grundsatzes der Zahlenlehre (S. 3, 4), anderseits eine durch gedächtnismäßige Aneignung gewonnene Einsicht.

Seien wieder zwei Mengen mit den Stückzahlen a und b gegeben. Fügen wir zu jeder der Mengen eine gleiche Menge mit der Stückzahl c hinzu, so wird die erstere auf die Stückzahl $a + c$, die zweite auf die Stückzahl $b + c$ gebracht. Wir behaupten nun, daß das Bestehen einer der drei Möglichkeiten $a > b$, $a = b$, $a < b$ gleichsinnig für $a + c$ und $b + c$ bestehen bleibt. Wir führen den Beweis für die Annahme $a < b$. Nach dieser Voraussetzung bleiben unverbundene Stücke b übrig, wenn man jedes Stück a je einem Stück b zugeordnet hat. In der Menge $a + c$, welche der Menge $b + c$ gegenübersteht, nehmen wir zunächst die Stücke c und verbinden jedes mit je einem Stücke der in der Menge $b + c$ enthaltenen Stücke c. Dann ver-

binden wir je ein Stück aus a mit je einem Stücke aus b, und dann bleiben nach der Annahme unverbundene Stücke in der letzteren Menge übrig.

Die auf a folgende Zahl heißt allgemein $a + 1$, daher die nun folgende $(a + 1) + 1$ oder nach dem zweiten Additionsgesetz $a + 2$. So erhält man die Zahlenfolge a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$ usw. Ist $a > b$ und $a + c = b + d$, so ist $c < d$.

§ 3. Die Multiplikation.

Bei Fortsetzung der letzten Gedankenreihe des vorigen Paragraphen kommen wir auf die Zahl $a + a$. Dafür setzen wir das Zeichen $2a$ und zählen nun weiter durch $2a + 1$, $2a + 2$, ... bis $2a + a$. Für diese Zahl, d. h. für $a + a + a$ setzen wir $3a$. So stoßen wir der Reihe nach auf die Zahlen

$$a + a = 2a, \quad a + a + a = 3a, \quad a + a + a + a = 4a$$

und allgemein auf die Zahl ba.

Diese neugewonnene Zahl ba heißt ein Produkt, a der Multiplikandus, b der Multiplikator. Die Erklärung der Multiplikation ist folgende:

Multiplizieren heißt, eine Summe aus lauter gleichen Summanden bilden. Der gleiche Summand heißt Multiplikandus, die Zahl, welche angibt, wie oft er gesetzt wird, Multiplikator. Zeichen der Multiplikation sind $a \cdot b$, $a \times b$, ab.

Erstes Multiplikationsgesetz. Multiplikator und Multiplikandus können vertauscht werden, ohne daß das Ergebnis der Multiplikation sich ändert: $ab = ba$.

Der Beweis sucht eine zweckmäßig geordnete Menge nach zwei verschiedenen Arten abzuzählen. Man ordnet Punkte reihenweise so an, daß in jeder wagerechten Reihe a Punkte sich finden. Zählt man nun nach wagerechten Reihen ab, so erhält man ba Punkte, wenn b wagerechte Reihen vorhanden sind. Dann zählt man nach senkrechten Reihen ab, wobei man auf ab Punkte stößt. Daher ist nach dem Grundsatze S. 3, 4 $ab = ba$. Statt der Punkte kann man, besonders beim ersten Unterricht, quadratische Platten oder a Urnen verwenden, welche je b Kugeln enthalten. Nimmt man aus jeder Urne eine Kugel und wiederholt das Verfahren bis zur Erschöpfung aller Kugeln, so erhält man ba, zählt man von Urne zu Urne fortschreitend, so erhält man ab Kugeln.

Ordnet man Punkte in Form eines Quadrates, so liefert die Abzählung parallel den Diagonalen den Satz von der Summe einer arithmetischen

Reihe. Die Seite des Quadrates enthalte $a + 1$ Punkte. Dann erhält man durch die Abzählung parallel einer Diagonale:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + a + (a + 1) + a + \cdots + 3 + 2 + 1 = (a + 1)^2.$$

Umschreitet man das Quadrat und zählt die Randpunkte, so erhält man für ungerade Randzahlen vom Innern ausgehend die Reihe: $1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 + \cdots$; für gerade Zahlen $4 + 12 + 20 + 28 + 36 + \cdots$.

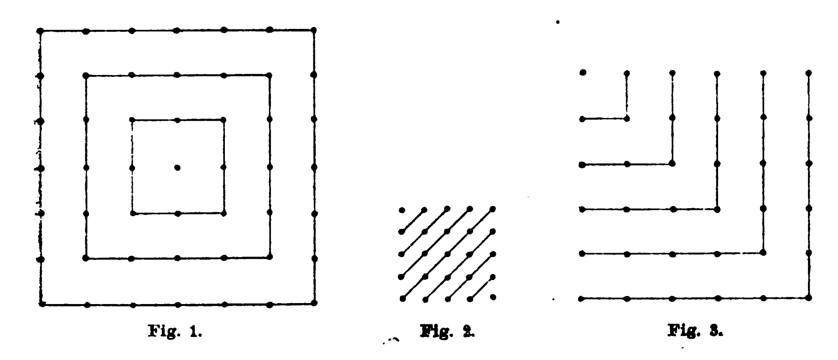


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Ordnet man von der Ecke ausgehend und zählt fortschreitend die Randzahlen der sich ergebenden Quadrate, so erhält man die Reihe $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2a + 1$. Die verschiedenen Arten der Zählung ergeben nach unserem Grundsatze immer denselben Wert. Man beachte die Ausnahmestellung der 1 bei der ersten Figur.

Das erste Multiplikationsgesetz berechtigt uns, Multiplikator und Multiplikandus mit gemeinsamem Namen Faktoren zu nennen.

Zweites Multiplikationsgesetz. Wenn eine Summe mit einer Zahl multipliziert wird, so erhält man dasselbe Ergebnis, als wenn man jeden Summanden einzeln mit der Zahl multipliziert und die gewonnenen Produkte addiert.

$$n(a + b + c + d) = na + nb + nc + nd.$$

Beweis. Nach der Erklärung der Multiplikation soll $a + b + c + d$ (die Summe) n-mal als Summand gesetzt werden. Wir führen das aus und zwar in folgender Schreibart:

$$\begin{array}{c} a + b + c + d, \\ a + b + c + d, \\ a + b + c + d, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a + b + c + d. \end{array}$$

Hierauf sammeln wir in senkrechter Reihe fortschreitend zuerst die a und erhalten na; dann die b, wobei wir ebenfalls nb finden usw.

Durch mehrfache Anwendung des zweiten Multiplikationsgesetzes folgt

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Die Anzahl der Summanden ist gleichgültig.

Drittes Multiplikationsgesetz. Bei Ausführung der Multiplikation ist man berechtigt, beliebige Faktoren zu Unterprodukten zu vereinigen: $a(bc) = b(ac) = c(ab)$.

Wir beginnen den Beweis mit der Betrachtung eines aus drei Faktoren gebildeten Produktes. Erklärt wird ein solches Produkt durch die Schreibung $a(bc)$. D. h. die Faktoren b und c werden zu dem Unterprodukt bc vereinigt und dieses wird mit a multipliziert. Führen wir dies aus, so ergibt die Erklärung der Multiplikation

$$bc + bc + bc + \cdots + bc \qquad (a \text{ Summanden}),$$

oder nach dem zweiten Multiplikationsgesetz:

$$b(c + c + c + \cdots + c).$$

Der Klammerausdruck ist ac, also ist

$$a(bc) = b(ac).$$

Wir hätten statt des vorigen Klammerausdrucks auch schreiben dürfen:

$$c(b + b + b + \cdots + b).$$

Der Klammerausdruck ist dann ab und mithin

$$a(bc) = c(ab), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Für vier Faktoren sei $a(bcd)$ die Erklärung. Es wird behauptet, daß dann folgende Bildungen der ursprünglichen gleichwertig sind: $b(acd)$, $c(abd)$, $d(abc)$; $(ab)(cd)$, $(ac)(bd)$, $(ad)(bc)$.

Der Beweis wird geführt durch Rückgang auf das zweite Multiplikationsgesetz und gleichzeitige Benutzung des für drei Faktoren bereits erwiesenen dritten. Durch die Erklärung entsteht die Summe:

$$bcd + bcd + bcd + \cdots + bcd \qquad (a \text{ Summanden}).$$

Vom Produkte bcd läßt sich der Faktor b, c, d, cd, bd, bc ablösen, etwa

$$b(cd + cd + cd + \cdots + cd)$$

oder

$$bd(c + c + c + \cdots + c).$$

Der erste Ausdruck ist $b(acd)$, der zweite $(bd)(ac)$. Hiernach ist klar, wie der Beweis für 5, 6 usw. Faktoren geführt wird. Man kann dem Beweise leicht die Form des Schlusses von n auf $n+1$ geben. Wir versparen die Darlegung dieser wichtigen Beweisart auf eine

spätere Gelegenheit. Die Wertbestimmung von $(a+b)(c+d)(e+f)$ usw. ist hiernach klar.

Das Zeichen $1 \cdot a$ hat nach der bisherigen Erklärung keinen Sinn. Denn in der Worterklärung der Multiplikation heißt es, a solle als Summand gesetzt werden. Das ist nur möglich, wenn a mindestens zweimal gesetzt wird. Wir sind daher genötigt, von zwei Dingen eins zu tun: entweder das Zeichen $1 \cdot a$ als sinnlos zu verwerfen oder ihm einen bestimmten Sinn beizulegen. Entscheiden wir uns für die letztere Maßnahme, so können wir keineswegs willkürlich verfahren. Wir müssen $1 \cdot a$ so erklären, daß die drei Multiplikationsgesetze gültig bleiben, wenn in irgend einem auftretenden Produkte ba die Einsetzung $b = 1$ gemacht wird.

1) $ab = ba$. Also muß $1 \cdot a = a \cdot 1$ sein. Letzteres ist aber $1 + 1 + \cdots + 1$ (a Summanden), also a. Folglich müssen wir $1 \cdot a = a$ annehmen.

2) $(a + b)c = ac + bc$. Nehmen wir $b = 1$, so wird $(a + 1)c = ac + 1 \cdot c$. Schreiben wir $a + 1$ mal c auf, so müssen wir es zunächst a mal und dann noch einmal schreiben. Wir finden wieder $1 \cdot c = c$.

3) $c(ab) = b(ac) = a(bc)$. Sei $a = 1$ und nehmen wir die Deutung schon als vollzogen an, so ergibt das dritte Multiplikationsgesetz die richtige Doppelgleichung $cb = bc = bc$.

Die Erklärung $1 \cdot a = a$ ist also mit den Multiplikationsgesetzen vereinbar und es kann daher kein Fehler vorkommen, wenn wir bei Anwendung dieser Gesetze uns nicht darum bekümmern, ob ein Multiplikator den Wert Eins hat, sondern ihn als unter die allgemeine Regel fallend ansehen. Die Annahme $1 \cdot a = a$ ist aber auch die einzig zulässige, wenn $1 \cdot a$ nicht verworfen werden soll. Dies folgt aus $ab = ba$; denn für $b = 1$ und $1 \cdot a > a$ erhält man den Widerspruch $a \cdot 1 = a < 1 \cdot a$. Also besteht das erste Multiplikationsgesetz für diese Annahme nicht.

Aus $1 \cdot a = a$ folgt noch nicht sofort, daß auch $1 \cdot 1 = 1$ ist. Hier ist wieder festzustellen, daß $1 \cdot 1$ entweder sinnlos ist oder den Wert 1 haben muß. Wenden wir das zweite Multiplikationsgesetz an, so ist $1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = a + 1 \cdot 1$. Vorhin war $1 \cdot (a + 1) = a + 1$, also ist $a + 1 = a + 1 \cdot 1$, also muß $1 \cdot 1 = 1$ sein.

Stellen wir fest, daß $ab > a$ und auch $ab > b$ ist, wenn beide Faktoren von Eins verschieden sind. Ist $a \gtreqless b$, so ist gleichsinnig $ma \gtreqless mb$.

Viertes Multiplikationsgesetz. Ist ein Faktor Null, so ist auch das Produkt Null. Ist ein Produkt Null, so ist mindestens ein Faktor Null.

Wir kommen hierauf weiter unten zurück.

§ 4. Die Potenz.

Wie aus der Addition durch Annahme gleicher Summanden die Multiplikation hervorging, so entsteht aus der Multiplikation durch Annahme gleicher Faktoren die Potenz. Sei

$$a \cdot a = a^2, \quad a \cdot a \cdot a = a^3, \quad a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4,$$
$$a \cdot a \ldots a = a^n \text{ (n gleiche Faktoren a).}$$

Der gleiche Faktor heißt Grundzahl, die Zahl n, welche angibt, wie oft die Grundzahl als Faktor steht, heißt Exponent, das entstandene Produkt heißt Potenz.

Erstes Potenzgesetz: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
Zum Beweise gehen wir auf die Erklärung zurück und schreiben a^m und a^n als Produkte von m bzw. n gleichen Faktoren a. Dann folgt die Richtigkeit des Gesetzes.

Zweites Potenzgesetz: $(a^m)^n = a^{mn}$.
Zum Beweise gehen wir auf die Erklärung zurück und schreiben

$$a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots a^m = a^{m+m+m+\cdots+m} = a^{mn}.$$

Es ist auch $(a^n)^m = a^{mn}$.

Wir bemerken hier, ohne ein besonderes Potenzgesetz daraus zu machen, daß $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ ist. Denn nach dem dritten Multiplikationsgesetz können wir $a^m \cdot b^m = a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot b \cdot b \cdot b \ldots b$ berechnen in der Zusammenfassung zu m Unterprodukten:

$$(ab)(ab)(ab) \ldots (ab) = (ab)^m.$$

Bevor wir weiter gehen, werfen wir noch einen Blick auf die nach dem Zehnergefüge gebildeten Zahlen. Sie erscheinen alle in der Form

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^n.$$

Die Vorzahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ haben sämtlich zwischen 1 und 9 liegende Werte. Bei Aufstellung des Zehnergefüges sind alle bisher betrachteten Rechnungsarten: Potenzierung, Multiplikation, Addition verwendet. Wir machen nun folgende Bemerkungen:

1. Nicht jede Potenz von 10 braucht bei einer gegebenen Zahl aufzutreten; wenn die höchste Potenz 10^n ist, so fehlen in einigen Zahlen die Potenzen, deren Exponenten (Hochzahlen) kleiner als n sind. Die Bezeichnung des Fehlens durch 0 als Vorzahl ist eben der gewaltige Schritt, den die Erfindung der Inder getan hat. Hiermit ist die Notwendigkeit gegeben, die Null als Zahl einzuführen, und wir bemerken, daß diese Einführung geschichtlich sich eben an die Notwendigkeit angeschlossen hat, eine Zahl zu haben, welche

mit einer andern gegebenen multipliziert das Produkt Null ergibt.

2. Statt der Grundzahl 10 hätte jede andere 2, 3, 4 usw. genommen werden können. So ist

$$7^2 = 49, \quad 7^3 = 343, \quad 7^4 = 2401, \quad 7^5 = 16807, \quad 7^6 = 117649.$$

Im Siebenergefüge würden die Zeichen 7, 8, 9 entbehrlich und wir würden haben

$$10 = 1 \cdot 7 + 3 = 13; \quad 100 = 2 \cdot 7^2 + 2 = 202;$$
$$1000 = 2 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 6 = 2626;$$
$$10000 = 4 \cdot 7^4 + 7^3 + 7^2 + 4 = 41104;$$
$$100000 = 5 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5 = 564355.$$

Im Zweiergefüge hätten wir nur die Zeichen 1 und 0 nötig. Wir würden schreiben $2 = 10$, $3 = 11$, $4 = 100$, $5 = 101$, $6 = 110$ usw. Diese Überlegung zeigt, daß man aus den Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 durch Addition, indem jede Zahl entweder einmal oder nicht vorkommt, alle Zahlen von 1 bis 127 einschließlich bilden kann. Um alle ganzzahligen Gewichtsgrößen von 1 bis 1023 bestimmen zu können, genügen 10 Gewichtstücke: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Beispiel: $1000 = 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 8$.

3. Die Gesamtheit der Zahlen stellt eine unendliche Menge dar. Denn zu jeder Zahl a kann immer eine noch größere $a + 1$ gestellt werden. Also stoßen wir nie auf eine größte (bedingungslos größte) Zahl. Durch Phantasiebilder, wie Zahl der Sandkörner, Wassertropfen im atlantischen Ozean, Schreibung einer Zahl mit dem in Tinte verwandelten Wasser eines Flusses oder des Ozeans kann man sich eine (unzulängliche) Vorstellung von einer „unendlichen“ Zahl machen. Sobald wir die Vorstellung zu einem Abschluß bringen, z. B. die Größe des einzelnen Sandkornes festsetzen, desgleichen den Raum fest bestimmen, den die zur Zählung kommenden Sandkörner erfüllen sollen, läßt sich immer eine bestimmte Zahl angeben, welche größer ist als die Anzahl der Sandkörner. Diese Betrachtung hat schon Archimedes in seinem ψαμμίτης angestellt und vor ihm, wie aus Horat. carm. I 28 hervorzugehen scheint, der Zeitgenosse Platons, Archytas. Nach diesen Erwägungen möchte man die mehr philosophische als mathematische Frage, ob es eine unendliche Menge wirklich vorhandener Dinge (actu existentia) geben könne, verneinen. Über die **endlichen** Mengen gilt, da sie durch Zählung erschöpft werden können, folgender Satz. Seien a und b zwei Zahlen, $a < b$. Dann ist es immer möglich, eine Zahl m derartig aufzufinden, daß entweder $ma = b$ oder zwar $ma < b$, aber $(m + 1)a > b$ ist.

Zusammenfassung. Wir haben zwei Additionsgesetze, drei Multiplikationsgesetze, zwei Potenzgesetze entwickelt. Ein viertes Multiplikationsgesetz haben wir vorläufig aufgestellt. In Formelschrift durch Selbstgleichungen (identische Gl.) ausgedrückt, heißen sie:

1) $a + b = b + a, \quad a + (b + c) = b + (a + c) = c + (a + b).$

2) $ab = ba, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad a(bc) = b(ac) = c(ab).$

3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$

Ferner haben wir gesehen, daß für zwei Zahlen a, b immer einer der drei sich ausschließenden Fälle gilt:

4) $a < b, \quad a = b, \quad a > b.$

Für diese drei Fälle ist gleichsinnig:

5) $a + c < b + c, \quad a + c = b + c, \quad a + c > b + c$

und ebenso

6) $am < bm, \quad am = bm, \quad am > bm.$

$a < b$ und $b > a$ sind gleiche Aussagen. Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$.

§ 5. Die Null.

Wir gehen von der Gleichung aus $x + 1 = 1$. Durch Anwendung des ersten Additionsgesetzes folgt $1 + x = 1$ und durch Anwendung des zweiten mit Hülfe von § 4, 5 ergibt sich $x + 2 = 2$, $x + 3 = 3$ und allgemein $x + a = a$. Durch Anwendung des zweiten Multiplikationsgesetzes und § 4, 6 folgt $mx + m = m$, also wegen $x + m = m$ auch $mx = x$. Ebenso zeigt das erste Multiplikationsgesetz $mx = xm$. Ferner ist $x(x + 1) = x$, also $x^2 + x = x$. Hieraus können wir durch Verwendung von x statt m in Gleichung $x + m = m$ schließen, $x^2 = x$. Hieraus folgt, daß $x^2 = x^3 = x^4 = x^n$ ist.

Wenn also die Zahl x, welche der Gleichung $x + 1 = 1$ ihre Entstehung verdankt, den Rechnungsgesetzen 1 bis 6 folgt und dem allgemeinen Größensatze: „Jede Größe ist sich selbst gleich und $a = b$, $a = c$ ergibt $b = c$“, dann ist der erste Teil des vierten Multiplikationsgesetzes durch die Gleichungen $mx = x$ und $x^n = x$ begründet. Der zweite Teil wird begründet durch die Festsetzungen zum dritten Multiplikationsgesetz, nämlich $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot a = a$ und $ab > a$, wenn beide Faktoren von Eins und von x verschieden sind. Diese Zahl x nennen wir Null und führen für sie das Zeichen $x = 0$ ein. Man hätte, ohne den Denkgesetzen untreu zu werden, anders verfahren können. Man hätte sagen können, die Gleichung $x + 1 = x$ sei durch keine der Zahlen $x = 1, 2, 3, \ldots$ lösbar; da nun außer diesen Zahlen keine anderen zugelassen werden, so sei die Gleichung

$x + 1 = x$ unlösbar und darum von jeder weiteren Betrachtung auszuschließen. Diese Erwägungen sind in sich widerspruchsfrei. Aber die Festsetzung, keine anderen Zahlen als die $x = 1, 2, 3, \ldots$ zulassen zu wollen, ist willkürlich und, wie aus der Zahlenschrift 10, 20, 100 usw. hervorgeht, im höchsten Grade unzweckmäßig. Mit dieser Erörterung haben wir einen Forschungsgrundsatz von großer Tragweite aufgestellt. Wir behalten uns vor, außer den Zahlen 1, 2, 3, ..., den positiven ganzen Zahlen, auch noch andere Zahlen einzuführen, welche denselben Rechnungsgesetzen folgen wie die Zahlen 1, 2, 3, ... Diese Rechnungsgesetze sind § 4 am Schluß aufgestellt.

Fragen wir noch, welche Bedeutung das Zeichen a^0 erhält. Die Antwort erteilt das erste Potenzgesetz. Aus $a^0 \cdot a^2 = a^{0+2} = a^2$ folgt, daß a^0 mit einer beliebigen Potenz von a multipliziert, dieselbe Potenz zum Produkt ergibt. Daher sind wir gezwungen, dem Zeichen a^0 den Wert 1 zu geben, wenn wir es bei der Rechnung überhaupt zulassen wollen. Hiermit stimmt das zweite Potenzgesetz. Denn seine Aussage $(a^m)^n = a^{mn}$ verwandelt sich für $m = 0$ in $1^n = 1$.

Mit der Addition haben wir die erste, mit der Multiplikation die zweite und mit der Potenzierung die dritte Rechenstufe erreicht. Für die erste und zweite Stufe gelten zwei Gesetze, die man Vertauschungs- (kommutatives) und Anschlußgesetz (assoziatives) nennen kann.

$$a + b = b + a \text{ und } ab = ba, \text{ Vertauschungsgesetze,}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c, \text{ Anschlußgesetze.}$$

Für die dritte Stufe besteht kein Vertauschungsgesetz. Auch das Anschlußgesetz besteht nur in gewissem Sinne. Man kann fragen, ob man die Potenzierung zu einer vierten Stufe entwickeln kann. Die Frage ist zu bejahen. Wir setzen:

$$(a, 1) = a, \quad (a, 2) = a^a, \quad (a, 3) = a^{a^a}, \quad (a, 4) = a^{a^{a^a}} \text{ usw.}$$

So erhalten wir

$$(2, 2) = 4, \quad (2, 3) = 2^{2^2} = 2^4 = 16,$$

$$(2, 4) = 2^{16} = 65536.$$

$$(3, 1) = 3, \quad (3, 2) = 27, \quad (3, 3) = 3^{27}.$$

Die Zahlen wachsen rasch zu ungeheurer Größe. Wir hätten also ein bequemes Mittel, um riesige Zahlen in einfacher Schreibart auszudrücken. Als besondere Beispiele seien 9^{9^9} und $10^{10^{10}}$ erwähnt Bis jetzt hat die Arithmetik keine Veranlassung gefunden, der Erforschung dieser Zahlen größere Aufmerksamkeit zuzuwenden.

§ 6. Die übrigen Rechnungsarten.

Betrachten wir die drei Gleichungen:

$$a + x = b, \quad ax = c, \quad x^n = a.$$

Wir haben den Buchstaben x gewählt, um anzudeuten, daß die betreffenden Zahlen nicht gegeben, sondern gesucht sind. In Worten würden die drei Gleichungen so heißen:

1) Gegeben zwei Zahlen: Minuendus und Subtrahendus. Gesucht eine dritte Zahl: Rest, Differenz, welche zum Subtrahendus addiert den Minuendus ergibt.

Das ist die Aufgabe der Subtraktion.

2) Gegeben zwei Zahlen: Dividendus und Divisor. Gesucht eine dritte Zahl: Quotient, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividendus ergibt.

Das ist die Aufgabe der Division.

3) Gegeben zwei Zahlen: Radikandus und Wurzelexponent. Gesucht eine dritte Zahl: Wurzel, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert, den Radikandus hervorbringt.

Das ist die Aufgabe der Wurzelausziehung.

Hiermit sind wir zu drei neuen Rechnungsaufgaben geführt, deren Lösung zu drei neuen Rechnungsarten führt. Zunächst sehen wir uns nach einer praktischen Bezeichnungsweise um. Da bei der Subtraktion x als Rechnungsergebnis aus den Zahlen a und b erwartet wird, könnte man etwa schreiben $x = \varphi(b, a)$. Der Buchstabe φ soll ausdrücken: x ist Rechnungsergebnis gemäß einer bestimmten Vorschrift (Funktion) aus b und a. Man hat nun längst sich über ein solches Zeichen geeinigt und schreibt $x = b - a$, (b minus a). Dieses Zeichen ist also nur eine andere Schreibart für die Gleichung $x + a = b$ und sagt vorläufig noch nichts aus über die Vorschrift, welche man befolgen soll, um aus den gegebenen Zahlen a und b die gesuchte x zu gewinnen. Ebenso sehen wir uns nach einem Zeichen für die Division und die Wurzelausziehung um. Man hat sich längst über solche Zeichen geeinigt. Die Lösung der Gleichung $ax = c$ schreiben wir $x = \frac{c}{a}$, (c durch a) und diejenige der Gleichung $x^n = a$ in der Form $x = \sqrt[n]{a}$ (n^{te} Wurzel aus a). Diese Zeichen sind also vorläufig jedes nur eine andere Schreibart für die Gleichungen $ax = c$ und $x^n = a$. Über die Vorschrift, welche man befolgen muß, um hier aus c und a, dort aus a und n die gesuchte Zahl x zu finden, wird nichts bestimmt. Nichtsdestoweniger ist die Festsetzung einer solchen Schreibart durchaus nicht unwichtig und nicht im mindesten ein

bloßes Spiel mit inhaltsleeren Zeichen. Aus der Erklärung folgen sofort die drei Gleichungen:

$$b - a + a = b, \quad a \cdot \frac{c}{a} = c, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Von jetzt ab sind die drei Rechnungsarten zu trennen, weil die Rechnungsgesetze der Addition, Multiplikation und Potenzierung verschieden sind und eine gemeinsame Behandlung nicht zulassen.

§ 7. Die Subtraktion.

Von der Zahl a ausgehend zählen wir weiter, bis wir zur Zahl b gelangen. Das Ergebnis dieser Zählung ist die Lösung der Gleichung (Bestimmungsgleichung) $x + a = b$ oder $a + x = b$ oder die Wertbestimmung des Zeichens $b - a$. Sobald dies Zeichen in eine Rechnung eintritt, wollen wir es zur Vermeidung von Widersprüchen mit Klammern umschließen. Wollen wir nun die Rechnungsregeln für das neue Zeichen ermitteln, so sind für Addition und Subtraktion folgende Zusammenstellungen möglich.

1) $c + (b - a)$, 2) $(b - a) + c$, 3) $c - (b - a)$, 4) $(b - a) - c$,
5) $(a + b) - c$, 6) $c - (a + b)$, 7) $(c + d) + (b - a)$,
8) $(c + d) - (b - a)$, 9) $(b - a) - (c + d)$, 10) $(c - d) + (b - a)$,
11) $(c - d) - (b - a)$.

Die Ergebnisse ohne Klammern geschrieben sind folgende.

1) $c + b - a$, 2) $b - a + c$, 3) $c - b + a$, 4) $b - a - c$,
5) $a + b - c$, 6) $c - a - b$, 7) $c + d + b - a$,
8) $c + d - b + a$, 9) $b - a - c - d$, 10) $c - d + b - a$,
11) $c - d - b + a$.

Diese Ergebnisse müssen kurz zusammengefaßt werden. Diese Zusammenfassung gelingt durch Beachtung der Zeichen $+$, $-$, welche wir kurz Vorzeichen nennen. Jede Zahl hat ein bestimmtes Vorzeichen. Den bisher ohne Vorzeichen stehenden Anfangszahlen oder Klammergrößen erteilen wir das $+$ Zeichen (positiv), das $-$ Zeichen ist das minus oder negative Vorzeichen. Nun gelten folgende Regeln:

1. Die Klammern, welche das positive Vorzeichen haben, werden weggelassen.

2. Hat eine Klammer das negative Vorzeichen, so ändern beim Weglassen der Klammern alle in der Klammer stehenden Zahlen ihr Vorzeichen.

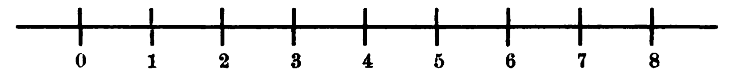
3. Man ist berechtigt, unter Beachtung dieser Klammergesetze, beliebige Zahlen zu neuen Klammergrößen zu vereinigen.

Die Beweise dieser Gesetze sind höchst einfach. Man kann dabei ein doppeltes Verfahren beobachten.

Entweder man geht auf die Erklärung zurück und zeigt, daß Rest und Subtrahend zusammen den Minuend ausmachen, oder man versinnbildet das Verfahren an abzählbaren Dingen. Als Beispiel wählen wir die Aufgabe 6). Minuend ist c, Subtrahend $a + b$, Rest $c - a - b$. Die Summe von Subtrahend und Rest ist

$$c - a - b + a + b$$

und das ist nach zweimaliger Anwendung von $b - a + a = b$ (§ 6, S. 15) der Minuend c. Die Versinnbildlichung gelingt leicht durch Abzählung eines auf einer Graden abgetragenen Maßes:



$a + b$ ist dargestellt durch Fortschreiten um zuerst a, dann b Streckeneinheiten $c - (a + b)$ durch Fortschreiten um c und dann Rückschreiten um $a + b$ Einheiten, $c - a - b$ durch Fortschreiten um c und Rückschreiten um zuerst a, dann um weitere b Einheiten.

Der Beweis durch Versinnbildlichung ist für den Unterricht von so überwiegender Klarheit, daß der rein arithmetische fast nicht in Betracht kommt. Dies gilt namentlich für den ersten Unterricht, wo nur der anschauliche Beweis genommen werden sollte.

Zweckmäßig ist es, zusammenfassend folgenden Satz durch Anschauung zu erhärten: Wenn beliebig viele Zahlen teils addiert, teils subtrahiert werden sollen, so ist es für das Ergebnis gleichgültig, in welcher Reihenfolge addiert oder subtrahiert wird.

Aus $a = b$ folgt $a - c = b - c$. Ebenso aus $a > b$ und $a < b$ gleichsinnig

$$a - c > b - c, \quad a - c < b - c.$$

Der Beweis folgt durch Addition von c.

Es ist $m(a - b) = ma - mb$. Denn aus $x + b = a$ folgt $mx + mb = ma$, in anderer Schreibart $mx = ma - mb$. Es ist aber x in anderer Schreibart $a - b$, also $m(a - b) = ma - mb$.

Diese Beziehung nennen wir das erweiterte zweite Multiplikationsgesetz. Für den ersten Unterricht wird man eine andere Ableitung vorziehen. Man setzt $a - b$ in Rückgang auf die Erklärung m-mal als Summanden.

§ 8. Erweiterung des Zahlengebiets. Negative Zahlen.

Die Aufgabe der Subtraktion wird unlösbar, wenn der Subtrahendus größer ist als der Minuendus. Denn die in § 7 gelehrte Vorschrift führt in diesem Falle nicht zum Ziel. Wir haben daher die

Wahl, entweder die Aufgabe als unmöglich zu bezeichnen und von der weiteren Behandlung Abstand zu nehmen oder zu sagen: Die Aufgabe hat auf dem bisherigen Zahlengebiete keine Lösung; deshalb führen wir ein neues Zahlengebiet ein, durch welches die Lösung jeder Subtraktionsaufgabe möglich wird. Sei die gestellte Aufgabe $x + a = b$ und $a > b$. Die Einführung des neuen Zahlengebietes vollziehen wir wie folgt. Wir gehen von der Gleichung aus $\varepsilon + 1 = 0$. Multiplizieren wir beiderseits mit $a - b$, so ist $(a - b)\varepsilon + a - b = 0$, also $(a - b)\varepsilon + a = b$. Wir haben also die Lösung

$$x = (a - b)\varepsilon \text{ der Gleichung } x + a = b.$$

Denn durch Einführung von $(a - b)\varepsilon$ statt x wird die Gleichung befriedigt. Es handelt sich nun um eine praktische Bezeichnung der neuen Zahlen. Aus $x + 1 = 0$ folgt $x + 1 - 1 = 0 - 1$ oder $x = 0 - 1$. Da nun 0 als Summand keine Bedeutung hat, ist naturgemäß, es wegzulassen. Die natürliche Bezeichnung der neuen Zahl, welche die Gleichung $x + 1 = 0$ löst, ist also $x = -1$. Ebenso die natürliche Bezeichnung der Lösung für $x + m = 0$ ist $x = -m$. Stellen wir die Gleichungen $x + 1 = 0$ und $y + m = 0$ zusammen. Aus der ersten folgt $mx + m = 0 = y + m$, also $y = mx$, also

(1) $$-m = m(-1).$$

Bis jetzt haben wir nur das zweite und vierte Multiplikationsgesetz auf die Gleichung $x + 1 = 0$ angewendet. Wir multiplizieren diese Gleichung mit x und erhalten $x^2 + x = 0$. Vorhin war $x + 1 = 0$, also ist $x^2 + x = x + 1$, also $x^2 = 1$ oder

(2) $$(-1)^2 = 1.$$

Ebenso folgt aus $x^3 + x^2 = 0$, daß $x^3 + x^2 = x^2 + x$, also $x^3 = -1$, dann wieder $x^4 = 1$ usw. Also:

(3) $$(-1)^{2m} = 1, \quad (-1)^{2m+1} = -1.$$

Aus $(-a) \cdot (-b)$ folgt, wenn wir $-a$ und $-b$ durch $a(-1)$ und $b(-1)$ ersetzen, $ab(-1)^2 = ab$ nach dem dritten Multiplikationsgesetze. Also:

(4) $$(-a) \cdot (-b) = ab.$$

Man kann diese Gleichung aber auch aus dem zweiten und vierten Multiplikationsgesetze allein ableiten.

Nunmehr können wir auch den Wert $(a - b)(c - d)$ ausrechnen und zwar ohne Rücksicht auf die Bedeutung von $a - b$ und $c - d$. Wir multiplizieren die Gleichungen:

$$x + b = a \quad \text{und} \quad y + d = c,$$

woraus folgt

$$xy + xd + yb + bd = ac,$$

oder

$$xy + (a - b)d + (c - d)b + bd = ac,$$

oder

$$xy + ad - bd + cb - bd + bd = ac,$$

oder

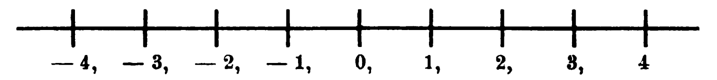
$$xy = ac - ad - bc + bd;$$

also

(5) $$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Hierbei ist nur das zweite und vierte Multiplikationsgesetz verwendet. Nehmen wir $a = c = 0$, so folgt wieder Gl. (4), nämlich $(-b) \cdot (-d) = bd$.

Wenden wir uns nun wieder zu unserem Bilde S. 16. Wenn wir nach einer Darstellung von $a - b$ fragen, falls $a > b$ ist und sie in einem Rückwärtsschreiten um b Streckeneinheiten nach Fortschritt um a Einheiten finden, so ist es durchaus naturgemäß, das Bild beizubehalten, wenn $a < b$ ist. Wir werden dann um $b - a$ Einheiten links vom Nullpunkt fortschreiten müssen, um das Bild der Zahl $a - b$ zu finden. So finden wir $-1, -2, -3, \ldots$ dargestellt. In diesem Bilde erkennen wir leicht, daß $a - b$ gleich $-b + a$ ist.



Die Deutung der Gleichung $3(-4) = -12$ als $-4 - 4 - 4 = -12$ ist eben durch das Bild gegeben. Aber $(-4) \cdot (3)$ und $(-4)(-3)$ können im Bilde nicht nachgewiesen werden. Diese Ausdrücke geben auch nach der Erklärung der Multiplikation keinen Sinn. Denn eine Zahl 3 kann niemals „minus 4" mal als Summand gesetzt werden. Hier bleibt nur die Möglichkeit, welche wir benutzt haben. Die Gleichung $x + 1 = 0$ wurde zum Ausgangspunkte gewählt; es folgte aus ihrer Zulassung der Zwang, die Rechnungsgesetze (zwei Additions-, vier Multiplikationsgesetze) auf sie anzuwenden, und dann folgten die sämtlichen Rechnungsgesetze der negativen Zahlen mit logischer Notwendigkeit.

Für die negativen Zahlen gelten die Gesetze § 4, 1) bis 5) unverändert. Das unter 6) aufgeführte besteht nur, wenn m positiv. Es ist z. B. $-7 > -9$. Beiderseitige Multiplikation mit -2 gibt ein falsches Ergebnis, beiderseitige Addition von 10 ein richtiges.

Wir merken uns die wichtigen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

§ 9. Die Division.

Die Gleichung $ax = b$ können wir nach früherer Festsetzung in anderer Schreibart durch $x = \frac{b}{a}$ ersetzen. Wie bei der Subtraktion haben wir nun wieder zwei Aufgaben vor uns, nämlich die Aufsuchung einer Vorschrift, um x zu bestimmen und die Ermittelung der Rechenregeln für das neue Zeichen $\frac{b}{a}$. Die erste Aufgabe lösen wir so: Wir bilden die Zahlen a, $2a$, $3a$, $4a$, ..., bis wir auf die Zahl b stoßen. Diejenige Zahl, welche als Multiplikator von a das Produkt b gibt, löst die Aufgabe und entspricht so dem Zeichen $\frac{b}{a}$. Findet sich eine solche Zahl nicht, so ist die Aufgabe vorläufig unlösbar. Hier ist eine wichtige Bemerkung zu machen, welche für die Subtraktion nicht gültig ist. Wenn die Aufgabe der Division unmöglich ist, so muß b zwischen zwei Zahlen der Reihe a, $2a$, $3a$, ... usw. fallen; es muß also sein:

$$ma < b < (m + 1)a.$$

m kann auch Null sein. Die Zahl m löst die Aufgabe der Division nicht; aber sie hat doch eine sehr wichtige Eigenschaft. Die beiden Zahlen ma und $(m + 1)a$ unterscheiden sich vor allen anderen Zahlen der Vielfachenreihe: sie schließen b als Grenzen ein.

Die Anfertigung einer Vielfachenreihe hat bei tatsächlicher Ausführung der Division die größte praktische Bedeutung. Will man zwei große Zahlen durcheinander dividieren, so bleibt zur Sicherheit und Schnelligkeit kein anderes Mittel übrig als die Anfertigung einer solchen Reihe. Sie braucht nur die Vielfachen 1—10 zu enthalten.

Wir nennen jetzt $\frac{b}{a}$ unterschiedslos einen Quotienten oder einen Bruch. b heißt Dividendus oder Zähler, a Divisor oder Nenner, und die Begriffserklärungen stehen S. 14.

Suchen wir jetzt die Rechnungsgesetze zu ermitteln.

1. Wir gehen von der Gleichung aus

$$ax = b.$$

Wir multiplizieren beiderseits mit m und fassen links ma als Unterprodukt zusammen: $(ma)x = mb$. Daher in anderer Schreibart

$$x = \frac{mb}{ma}.$$

Vorhin war $ax = b$, also in anderer Schreibart $x = \frac{b}{a}$. Daher finden wir das erste Bruchgesetz:

$$\frac{b}{a} = \frac{mb}{ma}.$$

Der Wert eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Vgl. das Subtraktionsgesetz:

$$b - a = (b + c) - (a + c).$$

2. Wir gehen wieder von der Gleichung aus: $ax = b$, multiplizieren mit m und fassen mx als Unterprodukt zusammen. Dann ist

$$(mx)a = mb,$$

in anderer Schreibart $mx = \frac{mb}{a}$ oder, wieder in anderer Schreibart, wir haben

$$m \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{a}.$$

Zweites Bruchgesetz. Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läßt (Subtraktion $c + (b - a) = (c + b) - a$).

3. Wir gehen von den beiden Gleichungen aus:

$$ax = b, \quad ay = c,$$

in anderer Schreibart

$$x = \frac{b}{a}, \quad y = \frac{c}{a}.$$

Nach dem zweiten Multiplikationsgesetz ist

$$a(x + y) = b + c,$$

in anderer Schreibart

$$x + y = \frac{b + c}{a},$$

folglich nach Einführung der andern Ausdrücke:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b + c}{a}.$$

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man die Zähler addiert. Ebenso ergibt sich

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b - c}{a}.$$

Benutzung der Gleichung $ax - ay = a(x - y)$ und Verwendung der Bruchschreibart führt zum Ziel. Sind die Nenner verschieden, so müssen die Brüche zuerst so umgeformt werden, daß sie gleichen Nenner erhalten. Dies gelingt mit Hilfe des ersten Bruchgesetzes und der Erwägung, daß das Produkt aller Nenner als Hauptprodukt sich so bilden läßt, daß jedesmal ein bestimmter Nenner als Faktor allen übrigen gegenüber tritt.

In den unter 3. gegebenen Gesetzen haben wir die Additionsgesetze der Brüche. Sie wären durch Vorschriften über bequeme Aufsuchung des gemeinsamen Nenners zu ergänzen. Wir verschieben dies auf einen späteren Abschnitt über Teilbarkeit der Zahlen.

Jede ganze Zahl a kann als Bruch mit beliebigem Nenner dargestellt werden. Denn aus $x = a$ folgt $mx = ma$, $x = \frac{ma}{m}$, also

$$a = \frac{ma}{m}.$$

Weil $a \cdot 1 = a$, so ist auch

$$a = \frac{a}{1}.$$

Die Gleichung $x \cdot 0 = b$ kann, wenn b von Null verschieden ist, nicht bestehen. Also sind auch die aus der unrichtigen Gleichung $x \cdot 0 = b$ gezogenen Folgerungen oder Umformungen sinnlos. Aus der Gleichung $x \cdot 0 = 0$ folgt in anderer Schreibart $x = \frac{0}{0}$. Weil nun $x \cdot 0 = 0$ für jeden Wert von x richtig ist, so ist die Angabe des genauen Wertes $\frac{0}{0}$ unmöglich; dieser Ausdruck ist also sinnlos. Durch Null darf nicht dividiert werden.

4. Multiplikationsgesetz der Brüche. Wir gehen von den Gleichungen aus

$$ax = b, \quad cy = d,$$

in anderer Form

$$x = \frac{b}{a}, \quad y = \frac{d}{c}.$$

Multiplizieren wir und vereinigen nach dem dritten Multiplikationsgesetz zu Unterprodukten, so ergibt sich

$$(ac)(xy) = bd,$$

in anderer Form

$$xy = \frac{bd}{ac}.$$

Also nach Herstellung der andern Schreibart links:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}.$$

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert (Subtraktion: $(b-a)+(d-c)$ $=(b+d)-(a+c)$).

5. Divisionsgesetze. Indem wir als Divisionszeichen den Doppelpunkt verwenden, behaupten wir:

$$\frac{b}{a}:c=\frac{b}{ac},$$

$$\frac{b}{a}:\frac{c}{d}=\frac{bd}{ac},$$

$$\frac{b}{a}:\frac{c}{a}=\frac{b}{c}.$$

Die Beweise gelingen durch Rückgang auf die Erklärung der Division.

Als Beispiel wählen wir die zweite Gleichung. Der Quotient soll sein $\frac{bd}{ac}$, der Divisor ist $\frac{c}{d}$. Multiplizieren wir Quotient und Divisor, so muß der Dividendus herauskommen. In der Tat ist

$$\frac{bd}{ac}\cdot\frac{c}{d}=\frac{bdc}{acd}=\frac{b}{a}.$$

§ 10. Die rationalen Zahlen. Zweite Erweiterung des Zahlengebietes.

Wir betrachten die Gleichung $ax=1$. Sie ist auf dem bisherigen Zahlengebiet unlösbar und kann daher als überhaupt unlösbar von weiterer Behandlung ausgeschlossen werden, wenn wir keine anderen Zahlen als die bisher eingeführten zulassen. Dies ist nun durchaus unpraktisch. Unsere Versinnlichung der ganzen Zahlen weist schon auf eine Darstellung der Zahl $x=\frac{1}{a}$, $x=\frac{b}{a}$ hin, indem wir die Strecke 01 oder die Strecke $0b$ in a gleiche Teile teilen. Wir wollen jedoch zunächst rein arithmetisch, ohne Versinnlichung vorgehen. Wenn die durch die Gleichungen

$$ax=1,\quad ay=b,$$

anders geschrieben:

$$x=\frac{1}{a},\quad y=\frac{b}{a}$$

erklärten Zahlen nicht verworfen, sondern zugelassen werden sollen, dann sind wir gezwungen, für sie die Rechnungsgesetze (zwei Additions-, vier Multiplikationsgesetze) als gültig anzusehen. Dann folgt sofort:

$$bax=b,$$

in anderer Schreibart:

$$a(bx)=b,\quad bx=\frac{b}{a}.$$

Also $bx = y$, oder

(1) $$b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}.$$

Wenn wir in dieser Weise fortschließen, erhalten wir alle Bruchgesetze des § 9.

Zur Klärung der Vorstellungen sei noch folgendes erwähnt:

$$5 \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}$$

folgt der gewöhnlichen Begriffserklärung der Multiplikation als fünfmalige Setzung des Summanden $\frac{1}{3}$. Aber $\frac{1}{3} \cdot 5$ hat keinen Sinn, da die Zahl 5 sich nicht $\frac{1}{3}$mal als Summand aufschreiben läßt. Die Bedeutung des Zeichens $\frac{1}{3} \cdot 5$ folgt nicht aus der Multiplikations**erklärung**, sondern aus dem Multiplikations**gesetze** $ab = ba$. Überhaupt verlieren Multiplikations- und Addition**serklärungen** für die neuen Zahlengebiete ihre Gültigkeit und sie werden ersetzt durch die sechs Gesetze:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b,$$
$$ab = ba, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad a(bc) = b(ac) = c(ab),$$
$$a \cdot 0 = 0.$$

Wir wollen die aus diesen Gesetzen gezogenen Folgerungen hier noch einmal zusammenstellen:

$$\frac{b}{a} = \frac{mb}{ma}, \quad m \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{a}, \quad \frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a},$$
$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}, \quad \frac{b}{a} : c = \frac{b}{ac}, \quad \frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{bc}{ad}.$$

Die Größenvergleichung gleichnamiger Brüche zeigt, daß sie mit den Zählern gleichsinnig wachsen. Der Bruch mit größerem Zähler läßt sich in zwei Teile zerlegen, von denen der eine dem kleineren Bruche gleich ist. Sind die Zähler gleich, die Nenner ungleich, so ist der Bruch mit größerem Nenner der an Wert kleinere. Sind zwei Brüche a, b gegeben, so fügen sie sich dem allgemeinen Größengesetz der sich ausschließenden drei Fälle $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Ist der Zähler eines Bruches kleiner als der Nenner, so heißt der Bruch **echt**, sonst **unecht**. Den unechten Bruch kann man zerlegen in die Summe eines echten Bruches und einer ganzen Zahl. Das Produkt zweier echten Brüche ist immer kleiner als jeder der Faktoren. Sei $a < b$, $c < d$, so ist das Produkt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b} \quad \text{und auch} \quad < \frac{c}{d}.$$

Die Vergleichung der Brüche in den Formen

$$\frac{ac}{bd}, \quad \frac{ad}{bd}, \quad \frac{bc}{bd}$$

zeigt dies sofort. Da $c < d$, so ist auch $ac < ad$.

Die Versinnlichung der Brüche durch unbegrenzt teilbare Dinge wie Strecke, Gewicht, Geschwindigkeit usw. ist so naturgemäß, daß ihre Einführung fast so alt zu sein scheint wie das Menschengeschlecht.

Erhebt man einen echten Bruch in immer höhere Potenzen, so kann man ihn beliebig klein machen.

Dieser Satz ist sofort klar, wenn man einen Bruch betrachtet, dessen Zähler Eins und dessen Nenner eine ganze Zahl ist. Sei g eine beliebig große, aber fest bestimmte Zahl. Der Nenner des Bruches mit dem Zähler 1 sei a. Erheben wir in die n^{te} Potenz, so bleibt der Zähler 1, der Nenner wird a^n. Ist aber n hinreichend groß, so übersteigt a^n jede beliebige vorher gegebene Zahl. Zur Vervollständigung des Beweises betrachten wir nun den Bruch $\frac{p}{p+1}$. Dieser kann, wenn p hinreichend groß ist, der Einheit beliebig nahe kommen. Sei $x = \frac{p}{p+1}$. Dann ist

$$x^2 = \frac{p^2}{p^2 + 2p + 1} = \frac{p}{p + 2 + \frac{1}{p}} < \frac{p}{p+2}.$$

Quadrieren wir nochmals, so folgt $x^4 < \frac{p}{p+4}$. Hieraus erkennt man die Wahrheit des Satzes. Es muß jedoch bemerkt werden, daß das Anwachsen des Nenners in weit stärkerem Maße geschieht als die vorstehende Entwicklung erkennen läßt.

Das vierte Multiplikationsgesetz erhält daher den Zusatz: Jeder echte Bruch kann durch Erhebung in eine hinreichend hohe Potenz beliebig klein gemacht werden. Gleiches gilt von dem Produkte ungleicher echter Brüche, wenn sie der Einheit nicht beliebig nahe kommen.

Brüche und ganze Zahlen bilden zusammen die Gesamtheit der rationalen Zahlen. Ist irgend eine rationale Zahl a gegeben, so kann man in beliebiger Anzahl andere rationale Werte angeben, welche dem Werte a näher liegen als eine beliebig kleine aber vorher fest bestimmte rationale Zahl angibt. Sei $\frac{1}{g}$ diese rationale Zahl und g eine beliebig große, aber fest bestimmte ganze Zahl. Wir bilden die Brüche mit dem Nenner bg, wo auch b eine willkürliche ganze Zahl ist. Also: $\frac{1}{bg}, \frac{2}{bg}, \frac{3}{bg}, \ldots$ Nun findet sich unter

diesen Brüchen a oder es findet sich nicht. Im ersten Falle sind zwei Nachbarwerte da, welche von a um $\frac{1}{bg} < \frac{1}{g}$ abweichen. Im zweiten Falle liegt a zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brüchen, also ist der Unterschied aus noch stärkerem Grunde $< \frac{1}{g}$.

§ 11. Dezimalbrüche.

Ist der Nenner eines Bruches 10 oder eine Potenz von 10, so heißt er ein Dezimalbruch. Auf die Dezimalbrüche ist die Schreibung nach Stellenwert anwendbar. Zur Angabe der Ganzen ist das Dezimalkomma von höchster Wichtigkeit. Die Einführung des Kommas ist Vieta (1540—1603, Paris, französischer Staatsbeamter) zu verdanken. Die sonst bei Erfindung der Dezimalbrüche verdienten Männer sind Simon Stevin und Jost Bürgi. Vgl. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik I, 90. Dezimalbrüche werden beim Aussprechen buchstabiert, nicht gelesen. Also: 3,425 = 3 Komma, vier, zwei, fünf, nicht 3 Ganze, 4 Zehntel, 2 Hundertstel, 4 Tausendstel, auch nicht 3 Ganze, 425 Tausendstel usw. Jeder Dezimalbruch kann als gemeiner Bruch geschrieben werden. Umgekehrt kann nicht jeder gemeine Bruch in einen Dezimalbruch mit endlicher Stellenzahl verwandelt werden. Es ist dagegen immer möglich, den Unterschied eines gegebenen Bruches gegen einen Dezimalbruch beliebig klein zu machen. Da hierbei gerade die Potenzen von 10 zur Verwendung kommen, so hat das Verfahren den Vorzug klarer Übersichtlichkeit. Man multipliziert Zähler und Nenner eines gegebenen Bruches mit einer hinreichend hohen Potenz von 10. Alsdann dividiert man Zähler und Nenner durch den ursprünglichen Nenner. Durch dieses Verfahren wird der Wert des Bruches nicht geändert. Dabei wird erkannt, wie groß die Annäherung ist, wenn an beliebiger Stelle abgebrochen wird. Sie ist bezeichnet durch einen Bruch mit dem Zähler 1, dessen Nenner eine Potenz von 10 ist.

Das Verfahren geht nur dann zu Ende, wenn der Nenner des gegebenen Bruches eine Zahl von der Form $2^\alpha 5^\beta$ ist, also für 2, 4, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100 usw.

In jedem andern Falle geht das Verfahren nicht zu Ende. Der gegebene Bruch sei $\frac{m}{n}$. Wir zerlegen m und n (siehe unten § 13) in ihre Primfaktoren, etwa

$$m = a_1{}^\alpha b_1{}^\beta c_1{}^\gamma \ldots, \quad n = a_2{}^\delta b_2{}^\varepsilon c_2{}^\zeta \ldots .$$

Dann müssen die a_1, b_1, c_1 sowohl unter sich als von den a_2, b_2, c_2 verschieden sein. Nach der Voraussetzung enthält n wenigstens einen von 2 und 5 verschiedenen Primteiler. Dieser sei a_2. Dann ist

$$m \cdot 10^k = a_1^{\alpha} b_1^{\beta} c_1^{\gamma} \ldots 2^k \cdot 5^k$$

durch a_2 nicht teilbar und damit die Behauptung bewiesen.

Nach der Divisionsungleichung ist eine Zahl q immer so bestimmbar, daß

$$qn < m \cdot 10^k < (q+1)n.$$

Daher bleibt bei der Division durch n für jede Zahl $m \cdot 10^k$ ein bestimmter Rest, und dieser Rest ist eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Nun kann man aber unendlich viele Zahlen $m \cdot 10^k$ bilden, nämlich:

$$\underset{\smile}{\overset{1}{}}\!\!m, \quad \overset{2}{10m}, \quad \overset{3}{10^2m}, \quad \overset{4}{10^3m}, \ldots;$$

also muß endlich einmal bei der Division durch n derselbe Rest erhalten werden und zwar spätestens bei der Potenz 10^{n-1}. Sei also

$$m \cdot 10^{\alpha} = r_{\alpha} + m_{\alpha} n, \quad m \cdot 10^{\beta} = r_{\alpha} + m_{\beta} n,$$

dann wird $m \cdot 10^{\alpha+1}$ geteilt durch n denselben Rest ergeben wie $r_{\alpha} \cdot 10$. Dasselbe gilt für $m \cdot 10^{\beta+1}$. Folglich geben von der Stelle ab, wo die erste Wiederkehr stattfindet, alle folgenden dieselben Ziffern in gleicher Wiederkehr. Wir haben einen periodischen Dezimalbruch. Die sich wiederholenden Stellen nennt man die Periode und wir haben gesehen, daß für den Nenner n die Periode höchstens $n-1$ Stellen hat. Im übrigen muß auf die Lehre von den geometrischen Reihen verwiesen werden. Es läßt sich zeigen, daß die Periode mit dem Dezimalkomma beginnt, wenn der Nenner n die Primteiler 2 und 5 beide nicht enthält. Ferner zeigt sich, daß die Stellenzahl der Periode noch genaueren Festsetzungen unterzogen werden kann. Endlich ergibt sich ein Verfahren, jeden gegebenen periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Die Rechnungsgesetze für die Dezimalbrüche sind folgende:

1. Addition. Man schreibt Komma unter Komma und addiert wie bei ganzen Zahlen.

2. Subtraktion. Man schreibt Komma unter Komma und subtrahiert wie bei ganzen Zahlen.

Die Beweise liegen in der Bemerkung, daß Dezimalbrüche entweder gewöhnliche gleichnamige Brüche sind oder durch Anhängung von Nullen gleichnamig gemacht werden können.

3. Multiplikation. Man läßt die Kommata weg und multipliziert die erhaltenen ganzen Zahlen. Im Produkte zählt man von rechts nach links soviel Stellen ab, als die beiden Faktoren zusammen Stellen hinter dem Komma haben. Die gefundene Stelle liefert die Kommastelle des Produkts.

Der Beweis ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{a}{10^h} \cdot \frac{b}{10^k} = \frac{ab}{10^{h+k}}.$$

4. Division. Man macht die Brüche gleichnamig, läßt die Kommata weg und dividiert die entstandenen ganzen Zahlen.

Der Beweis ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{a}{10^h} : \frac{b}{10^h} = \frac{a}{b}.$$

Von besonderer Wichtigkeit sind die Rechnungsgesetze für gekürzte Dezimalbrüche.

Es ist häufig nötig, den Dezimalbruch an einer bestimmten Stelle zu schließen. Dazu zwingen außer der Unmöglichkeit, mit unendlichen Zahlen zu rechnen, auch Anforderungen des praktischen Gebrauchs.

Unterdrückt man von der n^{ten} Stelle an alle folgenden Stellen, so ist der Fehler kleiner als eine Einheit der letzten nicht unterdrückten Stelle (ausgenommen den einzigen Fall, daß die folgenden Stellen alle den Wert 9 haben; dann ist der Fehler gleich einer solchen Einheit). Dieser Fehler läßt sich noch auf die Hälfte des Betrages herabsetzen, wenn man die letzte nicht unterdrückte Stelle um Eins erhöht, falls die erste folgende Stelle 6, 7, 8, 9 ist. Ist sie gerade 5, so kann man unterdrücken oder die Vorstelle um 1 erhöhen; folgen auf 5 noch Stellen, so soll man erhöhen. Also 0,947 statt 0,946500001.

Sind n Summanden zu addieren, und beträgt bei jedem einzelnen der Fehler weniger als $\frac{1}{\alpha}$, so ist der Fehler der Summe sicher $< \frac{n}{\alpha}$. Sind Minuend und Subtrahend mit einem Fehler $< \frac{1}{\alpha}$ behaftet, so können die Fehler beim Subtrahieren sich ungünstigenfalls addieren, jedenfalls ist der Fehler im Rest $< \frac{2}{\alpha}$.

Für die Multiplikation gilt folgendes. Bei der Ausführung dieser Rechnungsart werden Teilsummen durch Multiplikation mit den einzelnen Stellen des Multiplikators gebildet. Brechen wir jede mit der n^{ten} Stelle ab, so kann der begangene Fehler höchstens gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ sein. Hat der Multiplikator m Stellen, die ganze Zahl eingerechnet, welche dem Komma vorausgeht, so beträgt die Unsicherheit $\pm \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{10^n}$. Multipliziert man z. B. zwei siebenstellige Dezimalbrüche, welche beide mit 0 beginnen und bricht man mit der 7ten Dezimale ab, so beträgt der Fehler höchstens $\pm \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{1}{10^7}$, also noch nicht vier Einheiten der letzten Dezimale.

Beim abgekürzten Multiplizieren bildet man nun nicht die einzelnen Teilsummen vollständig, sondern beschränkt sich auf die zur Verwendung kommende Ziffernzahl. Doch wird gewöhnlich bei Bildung des Produkts die der n^{ten} folgende Stelle noch so berücksichtigt, daß die erhaltenen Zehner auf der n^{ten} Stelle verrechnet werden und zwar unter sinngemäßer Erhöhung, wenn das erhaltene Produkt dem folgenden Zehner näher liegt.

Für die Division liegt das abgekürzte Verfahren darin, daß man die Vielfachen des Divisors nur bis zur n^{ten} Stelle entwickelt. Das Verfahren zeigt bezüglich der Genauigkeit dieselbe Fehlergrenze wie die Multiplikation.

§ 12. Die Rechnung mit Wurzelzeichen.

Die Gleichung $x^n = a$ können wir nach früherer Festsetzung in anderer Schreibart durch $x = \sqrt[n]{a}$ ersetzen. Wie bei der Subtraktion und Division haben wir nun wieder zwei Aufgaben vor uns, nämlich die Aufsuchung einer Vorschrift, um x zu bestimmen und die Ermittlung der Rechnungsregeln für das Zeichen $\sqrt[n]{a}$. Die erste Aufgabe lösen wir so: Wir bilden die Zahlen 1^n, 2^n, 3^n, 4^n ... bis wir auf die Zahl b stoßen. Diejenige Zahl, welche als Grundzahl mit n potenziert b ergibt, löst die Aufgabe und entspricht dem Zeichen $\sqrt[n]{a}$. Findet sich eine solche Zahl nicht, so ist die Aufgabe vorläufig unlösbar. Aber es muß sich dann immer eine Zahl finden von der Eigenschaft

$$m^n < a < (m + 1)^n.$$

Wir sehen, daß bis jetzt die größte Ähnlichkeit besteht zwischen der Rechnung mit Wurzelausdrücken und besonders der Division.

1. Additions- und Subtraktionsgesetze für Wurzelausdrücke bestehen nicht.

2. Die Multiplikations- und Divisionsgesetze.

Wir gehen von den Gleichungen aus:

$$x^n = a, \quad y^n = b, \text{ anders geschrieben } x = \sqrt[n]{a}, \quad y = \sqrt[n]{b}.$$

Durch Multiplikation und geeignete Zusammenfassung der Faktoren nach dem dritten Multiplikationsgesetze ist

$$(xy)^n = ab, \quad \text{anders geschrieben } xy = \sqrt[n]{ab}.$$

Also nach Einsetzung links

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Die Vergleichung mit dem Beweise des Bruchmultiplikationsgesetzes S. 21 ist sehr lehrreich und zeigt die vollständige Übereinstimmung des Verfahrens. Genau so wurde auch aus $x + a = b$, $y + c = d$ auf

$$(b - a) + (d - c) = b + d - (a + c)$$

geschlossen. Das Divisionsgesetz ergibt sich ähnlich. Aus

$$x^n = a \text{ und } y^n = b$$

folgt

$$\frac{x^n}{y^n} = \frac{a}{b}.$$

Nun folgt aus dem Multiplikationsgesetz der Brüche $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$, also

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}, \text{ anders geschrieben } \frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

oder

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Jede Zahl läßt sich als Wurzel darstellen. Wie

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ (S. 15)},$$

so folgt aus $x = a$ zunächst $x^n = a^n$, $x = \sqrt[n]{a^n}$, also

$$a = \sqrt[n]{a^n}.$$

Die beiden Zeichen $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ und $\sqrt[n]{a^n}$ sind gleichwertig mit a.

Aus dieser Erörterung ergibt sich mit Hülfe S. 28 gegebener Sätze:

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}.$$

3. Potenz- und Wurzelgesetze. Aus $x^n = a$ folgt

$$x^{mn} = a^m.$$

Dies kann man auf der linken Seite als $(x^m)^n$ auffassen und hat daher in anderer Schreibart:

$$x^m = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

$x^{mn} = a$ wird in anderer Schreibart $x^m = \sqrt[n]{a}$ oder $x^n = \sqrt[m]{a}$, oder $x = \sqrt[mn]{a}$. Die drei Zeichen

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

bedeuten dieselbe Zahl.

Es ist jetzt zu untersuchen, was aus der Potenz wird, wenn dem Exponenten die Werte 0, 1, $m - n$, $\frac{p}{q}$ beigelegt werden.

Der Rückgang auf die Begriffserklärung versagt bei 0 und 1. Bei $m - n$ versagt diese Methode nicht, wenn $m - n \gtreqless 2$; bei $\frac{p}{q} > 1$ würde der Rückgang nur eine mühsame Umredung der folgenden Ableitung sein.

Es ist $a^0 \cdot a^m = a^{0+m}$ nach dem ersten Potenzgesetz, also a^0 diejenige Zahl, welche mit a^m multipliziert a^m hervorbringt, dies leistet keine von 1 verschiedene Zahl, also ist a^0 entweder sinnlos oder gleich 1; vgl. § 5. Ebenso ist nach dem ersten Potenzgesetz $a^1 \cdot a^m = a^{m+1}$, also a^1 diejenige Zahl, welche mit a^m multipliziert a^{m+1} hervorbringt. Dies leistet keine von a verschiedene Zahl, also ist a^1 entweder sinnlos oder $= a$. Ebenso findet man

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Erstes Potenzgesetz S. 10 und Subtraktionsgesetz S. 15.

Also ist unter Anwendung der Bruchstrichschreibart:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Nach dem zweiten Potenzgesetz und dem Bruchgesetz S. 15 finden wir ebenso

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{q \cdot \frac{p}{q}} = a^p.$$

$a^{\frac{p}{q}}$ ist also diejenige Zahl, welche in die q^{te} Potenz erhoben a^p ergibt. Dies leistet nur eine einzige Zahl. Denn die Potenzen wachsen monoton sowohl mit der Grundzahl wie mit dem Exponenten. Folglich ist $a^{\frac{p}{q}}$ diejenige Zahl, welche auf die q^{te} Potenz erhoben a^p hervorbringt, in der Wurzelschreibart:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Zu der Gleichung S. 29 kommt eine dritte hinzu und wir haben:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Die Monotonie einer Zahlenfolge besteht in der Eigenschaft, niemals abzunehmen (oder auch niemals zuzunehmen). Die Potenzen $a^0, a^1, a^2, \ldots a^n, \ldots$ sind in diesem Falle. Also wächst die Potenz monoton mit dem Exponenten. Ebenso verhält es sich aber mit a^n, $(a+1)^n$, $(a+2)^n$, . ., also wächst die Potenz auch monoton mit der Grundzahl.

Die Berechnung der durch die Wurzelzeichen angegebenen Werte wird § 14 vorgetragen.

§ 13. Teilbarkeit der Zahlen.

Wenn wir die natürlichen Zahlen der Reihe nach untersuchen, so finden wir, daß die meisten sich als Produkte kleinerer Zahlen darstellen lassen. Bei einigen Zahlen gelingt diese Darstellung nicht, z. B. nicht bei 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 usw.

Zahlen, welche außer der Einheit keinen kleineren Teiler als sie selbst besitzen, nennt man Primzahlen.

Lehrsatz. Wenn zwei Zahlen a und b nicht durch die Primzahl p teilbar sind, so ist auch ihr Produkt ab nicht durch p teilbar.

Beweis. Wir bilden die Vielfachen von a

$$1a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \ldots$$

Wenn irgend eins dieser Vielfachen durch p teilbar ist, so ist dies entweder das kleinste unter den durch p teilbaren Vielfachen oder es ist nicht das kleinste. Im letzteren Falle kann man das kleinste Vielfache finden. Es sei dies etwa ma, wobei der Voraussetzung nach m nicht durch p teilbar ist, also auch nicht $m = p$. m kann nun entweder größer oder kleiner als p sein. Sei zunächst $m > p$. Dann ist $(m - p)a = ma - pa$ eine durch p teilbare Zahl, weil ma sowohl wie pa den Faktor p haben, der sich nach der Erweiterung des zweiten Multiplikationsgesetzes abscheiden läßt. Zugleich ist aber $m - p < m$ und $(m - p)a$ folglich ein kleineres, durch p teilbares Vielfaches von a als ma. Dies ist ein Widerspruch. Folglich kann nicht sein $m > p$. Sei also $m < p$. Da p eine Primzahl ist, so ist p nicht durch m teilbar. Bilden wir die Vielfachen von m, so kommen wir auf die Ungleichung

$$nm < p < (n + 1)m.$$

Folglich ist

$$p < (n + 1)m, \quad p < nm + m,$$

also

$$p - nm < m.$$

Nun ist aber $(p - nm)a = pa - nma$. Da nun ma durch p teilbar sein soll, so ist nma und folglich auch $pa - nma$ durch p teilbar. Es ist aber $p - nm < m$, also $(p - nm)a$ ein kleineres durch p teilbares Vielfaches von a als ma. Das ist ein zweiter Widerspruch. Also kann auch nicht sein $m < p$. Folglich sind alle drei Möglichkeiten $m > p$, $m = p$, $m < p$ ausgeschlossen; eine Zahl m existiert nicht.

Wenn eine gegebene Zahl N in Primfaktoren zerlegt werden soll, so bleibt nichts anderes übrig, als eine genügende Anzahl Versuche. Es könnte scheinen, als müsse man alle Primzahlen $p < N$ durch-

probieren und zusehen, ob N eine Teilung zuläßt. Dies ist nicht nötig. Bilden wir die Reihe 1^2, 2^2, 3^2 usw., so wird entweder eine Zahl m von der Eigenschaft angetroffen, daß $m^2 = N$ ist oder nicht. Im ersten Falle ist die Zerlegung auf eine leichtere Aufgabe, die Zerlegung der kleineren Zahl m zurückgeführt. Im zweiten Falle kann m so bestimmt werden, daß ist:

$$m^2 < N < (m+1)^2.$$

Ist nun $p > m$, so ist mindestens $p = m + 1$, also $p^2 > N$. Wenn also $pq = N$ ist, so muß bei Bildung der Reihe

$$p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)p$$

die Zahl q als Faktor von p gefunden werden, denn das folgende Glied der Reihe ist $p^2 > N$. Es ist also $q < p$. Man wird also den Faktor q und damit den Ergänzungsfaktor p antreffen, wenn man alle Primzahlen durchprobiert, welche unterhalb der Grenze m, diese eingeschlossen, liegen. Legen wir dem Zeichen $\sqrt{N}$ die durch die Ungleichung

$$m^2 < N < (m+1)^2$$

gegebene Bedeutung bei:

$$m < \sqrt{N} < m + 1,$$

so sehen wir, daß N eine Primzahl sein muß, wenn es durch keine der unterhalb $\sqrt{N}$ liegenden Primzahlen teilbar ist.

Beispiele. 67 soll untersucht werden. $8^2 < 67 < 9^2$. 67 ist nicht durch 2, 3, 5, 7 teilbar, also eine Primzahl. 401 desgleichen. $20^2 < 401 < 21^2$. 401 ist nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 teilbar, also eine Primzahl.

Durch Sätze der höheren Arithmetik kann das Verfahren abgekürzt werden.

Eine Zahl kann nach dem Lehrsatze S. 31 nur auf eine einzige bestimmte Art in Primfaktoren zerlegt werden. Man erhält dabei die Form:

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

wobei a, b, c bestimmte Primzahlen und α, β, γ bestimmte Zahlen $\geqq 1$ bedeuten. Das will sagen: Ist die Zerlegung ausgeführt und die Primzahl p kommt unter den a, b, c nicht vor, so ist auch N nicht durch p teilbar. Hat ferner N den Teilfaktor a^α, so ist N durch a^α, aber nicht durch $a^{\alpha+1}$ teilbar. Letzteres ist leicht einzusehen. Das Produkt $b^\beta c^\gamma \ldots$ ist nach unserm Lehrsatz durch a nicht teilbar. Folglich kann man eine Zahl m finden von der Eigenschaft:

$$ma < b^\beta c^\gamma \cdots < (m+1)a,$$

folglich

$$ma^{\alpha+1} < N < (m+1)a^{\alpha+1}.$$

Die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren ist eine sehr wichtige und interessante Aufgabe. Sie ermöglicht es sofort, für gegebene Zahlen den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zu bestimmen.

Zunächst soll die zweite Aufgabe und zwar an einem Beispiele gelöst werden. Das allgemeine Verfahren erklärt sich daraus von selbst.

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu finden.

Lösung. $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 2^2$, $5 = 5$, $6 = 2 \cdot 3$, $7 = 7$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$.

Zusammenstellung der verschiedenen Primfaktoren:
2, 3, 5, 7.

Höchste Potenzen, in denen sie auftreten: 3, 2, 1, 1.

Daher Lösung: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Man kann diese Lösung auch anders erhalten und zwar nach einem Verfahren, wodurch zugleich die Primzahlzerlegung stillschweigend durchgeführt wird.

	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
2	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5
2	1,	3,	1,	5,	3,	7,	2,	9,	5
2	1,	3,	1,	5,	3,	7,	1,	9,	5
3	1,	1,	1,	5,	1,	7,	1,	3,	5
3	1,	1,	1,	5,	1,	7,	1,	1,	5
5	1,	1,	1,	1,	1,	7,	1,	1,	1
7	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1

Das Produkt der links auftretenden Zahlen ist $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Das Verfahren bedarf nach der in die Primfaktorenzerlegung gewonnenen Einsicht keiner weiteren Erklärung. Für denjenigen, welcher mit der Primzahlpotenz nicht vertraut ist, hat das angegebene Verfahren den Vorzug der leichten Erlernbarkeit.

Wenden wir uns der zweiten Aufgabe zu: den größten gemeinsamen Teiler gegebener Zahlen zu finden. Wir zerlegen die gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren und stellen diejenigen Primzahlen zusammen, welche allen gemeinsam sind. Ist keine solche Primzahl vorhanden, so haben die Zahlen nach dem Lehrsatz S. 32 außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler. Sind solche Primzahlen vorhanden, so suchen wir den kleinsten Exponenten auf, mit welchem be-

haftet der Primteiler vorkommt. Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren in kleinster vorkommender Potenz ist die gesuchte Zahl.

Auch bei dieser Aufgabe erhalten wir eine zweite Lösung und zwar eine eigentliche, ohne versteckte Primzahlzerlegung. Die beiden Zahlen a und b mögen den größten gemeinsamen Teiler t haben. Es sei $a = mt$ und $b = nt$. Damit ist gesagt, daß m und n außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann sei b die kleinere Zahl. Wir ermitteln die Zahl q, welche so beschaffen ist, daß die Divisionsungleichheit besteht:

$$qb < a < (q+1)b.$$

Es ist also

$$a - qb < b.$$

Die Zahl $a - qb = mt - qnt = t(m - nq)$ besitzt den gemeinsamen Teiler t mit b und zwar als größten gemeinsamen Teiler. Denn die nach Abscheidung von t bleibenden Zahlen $m - nq$ und n können noch weitere Teiler nicht gemeinsam haben, weil diese auch $(m - nq) + nq = m$ enthalten müßte. Von der Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers für die Zahlen a und b sind wir also auf Lösung derselben Aufgabe für die kleineren Zahlen b und $a - qb$ gekommen. Folglich muß das Verfahren, wenn es hinreichend oft wiederholt wird, zu Ende gehen. Man kann dem Verfahren einen einfachen Zug geben durch Behandlung nach einer Rechenvorschrift wie das folgende Beispiel zeigt:

11 339 | 16 849 | 1
11 339
5 510 | 11 339 | 2
11 020
319 | 5510 | 17
319
2320
2233
87 | 319 | 3
261
58 | 87 | 1
58
29 | 58 | 2.

$$\begin{aligned}
16\,849 &= 1 \cdot 11\,339 + 5510,\\
11\,339 &= 2 \cdot 5\,510 + 319,\\
5\,510 &= 17 \cdot 319 + 87,\\
319 &= 3 \cdot 87 + 58,\\
87 &= 1 \cdot 58 + 29,\\
58 &= 2 \cdot 29 + 0.
\end{aligned}$$

Der gemeinsame größte Teiler ist 29. Haben die Zahlen a und b außer der Einheit keinen gemeinsamen Teiler, so heißen sie *relative Primzahlen*. Dieses Verhalten wird ebenfalls durch Befolgung der obigen Rechenvorschrift aufgedeckt.

```
72 | 125 | 1
     72
     53 | 72 | 1
          53
          19 | 53 | 2
               38
               15 | 19 | 1
                    15
                     4 | 15 | 3
                         12
                          3 | 4 | 1
                              3
                              1 | 3 | 3.
```

$$
\begin{aligned}
125 &= 1 \cdot 72 + 53,\\
72 &= 1 \cdot 53 + 19,\\
53 &= 2 \cdot 19 + 15,\\
19 &= 1 \cdot 15 + 4,\\
15 &= 3 \cdot 4 + 3,\\
4 &= 1 \cdot 3 + 1,\\
3 &= 3 \cdot 1.
\end{aligned}
$$

In Buchstaben sieht die Vorschrift so aus:

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \quad r_1 = q_3 r_2 + r_3 \text{ usw.}$$

Hiermit ist also ein Verfahren gegeben, den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen zu bestimmen. Sind drei Zahlen a, b, c gegeben, so sucht man zunächst den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b. Er sei t. Dann stellt man t mit c zusammen und sucht den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Zahlen usw.

Sind a und b zwei Zahlen, $a > b$, so kann man immer nach der Divisionsungleichung

$$mb < a < (m + 1)b$$

die Zahl m und ferner eine Zahl n finden, so daß

$$a = mb + n.$$

Man sagt: m ist der Quotient (im uneigentlichen Sinne), n ist der Rest. Die Zahl n ist eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots b - 1$; immer kleiner als b. Diese Gleichung schreibt man in der Zahlentheorie wie folgt:

$$a \equiv n \bmod b.$$

Der Sinn ist: a geteilt durch b gibt den Rest n. Gesprochen wird: a kongruent n nach dem Modul b. Für die Kongruenzen gelten ähnliche Sätze wie für Gleichungen. Ist $a \equiv n \bmod b$, so bleibt die Kongruenz richtig, wenn man gleiches addiert, subtrahiert, mit gleicher Zahl beiderseits multipliziert oder auf gleiche Potenz erhebt. Die Beweise sind sehr einfach. Wir wollen einen derselben vorführen.

Voraussetzung: $a \equiv n \bmod b$.

Behauptung: $am \equiv nm \bmod b$.

Beweis: Für $a \equiv n \bmod b$ kann man schreiben $a = n + bq$. Also ist $am = nm + mbq$. Dafür kann man aber setzen

$$am \equiv nm \bmod b.$$

Ist p eine Primzahl und $x \equiv a \bmod p$, so wollen wir beiderseits mit allen Zahlen 1, 2, 3, ... $p - 1$ multiplizieren und rechts immer den kleinsten Rest mod p nehmen. So ist

$$10 \equiv 3 \bmod 7, \quad 20 \equiv 6 \bmod 7, \quad 30 \equiv 2 \bmod 7,$$
$$40 \equiv 5 \bmod 7, \quad 50 \equiv 1 \bmod 7, \quad 60 \equiv 4 \bmod 7.$$

Wir behaupten: es kann rechts niemals derselbe Rest mehrmals erhalten werden. Gesetzt, es sei

$$bx \equiv c \bmod p \text{ und } dx \equiv c \bmod p, \text{ wo } b, d, c, x$$

Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ... $p - 1$ sind. Dann wäre $bx \equiv dx$ oder $(b - d)x$ durch p teilbar. Dies ist unmöglich. Denn x ist nach der Voraussetzung nicht durch p teilbar, b und d sind jedes für sich $< p$, also ihre Differenz ebenfalls $< p$, folglich nicht durch p teilbar.

Man nennt die Zahlen, welche bei der Kongruenz $ax \equiv b \bmod p$ rechts hervorgehen, ein Restgefüge. Vollständig ist das Restgefüge, wenn alle Zahlen 1, 2, 3, ... $p - 1$ auftreten. Letzteres ist hier der Fall. Denn a durchläuft alle Zahlen 1, 2, 3, ..., $p - 1$, b gleichfalls Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ..., $p - 1$. Und weil keine dieser Zahlen zweimal auftritt, so müssen alle auftreten, freilich in mannigfaltiger Reihenfolge.

Wir bilden nunmehr die Kongruenz

$$ax \equiv b \bmod p,$$

wo a eine bestimmte Zahl $< p$ bedeutet, x aber der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, ..., $p - 1$ durchläuft. Rechts erscheinen dann dieselben Zahlen 1, 2, 3, ... $p - 1$, wenngleich in anderer Reihenfolge. Bilden wir nun das Produkt aller dieser Kongruenzen und bezeichnen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p - 1) = P$, so ist

$$P \cdot x^{p-1} - P \equiv 0 \bmod p$$

oder

$$P(x^{p-1} - 1) \equiv 0 \bmod p.$$

Da nun P nicht durch p teilbar ist, so muß $x^{p-1} - 1$ durch p teilbar sein, und wir haben den berühmten Fermatschen Satz:

Ist p eine Primzahl und a irgend eine nicht durch p teilbare Zahl, dann ist $a^{p-1} - 1$ immer durch p teilbar.

Aus dem Fermatschen Satze können wir gleich eine wichtige Folgerung ziehen. Ist $a^h \equiv 1 \bmod p$, und h die kleinste Zahl, für

welche $a^h \equiv 1 \bmod p$ wird, dann ist entweder $h = p - 1$ oder ein Teiler von $p - 1$. Wenn h kein Teiler von $p - 1$ ist, so besteht für h die Divisionsungleichung:

$$mh < p - 1 < (m + 1)h$$

und

$$p - 1 = mh + k,$$

wo $k < h$. Nun ist $a^h \equiv 1 \bmod p$, also auch $a^{mh} \equiv 1 \bmod p$. Anderseits ist nach dem Fermatschen Satze $a^{mh+k} \equiv 1 \bmod p$, folglich auch

$$a^{mh+k} - a^{mh} \equiv 0 \bmod p$$

oder

$$a^{mh}(a^k - 1) \equiv 0 \bmod p.$$

Da nun a^{mh} nicht durch p teilbar ist, so muß $a^k - 1$ durch p teilbar sein, welches mit der Annahme im Widerspruch steht, daß a erst in der h^{ten} und nicht in einer kleineren Potenz kongruent der Einheit werde. Zahlen, welche erst in der $p - 1^{\text{ten}}$ und nicht in einer kleineren Potenz der Einheit kongruent werden, heißen primitive Wurzeln zum Modul p.

Wir können jetzt Teilbarkeitsregeln für die Zahlen, besonders im dezimalen System angeben. Jede Zahl ist in der Form enthalten:

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

Sie ist durch 2 teilbar, wenn a_0 durch 2 teilbar ist,
" " " 4 " " $a_0 + a_1 \cdot 10$ durch 4 teilbar ist.
" " " 8 " " $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2$ durch 8 teilbar ist.
" " " 5 " " a_0 durch 5 teilbar ist.

Folglich muß $a_0 = 0$ oder $= 5$ sein. Für die Teilbarkeit durch 25, 125 usw. gelten ähnliche Gesetze wie für die Potenzen von 2.

Für die Teilbarkeit durch 3 gelten die Kongruenzen

$$10 \equiv 1, \quad 10^2 \equiv 1 \text{ usw. } \bmod 3, \quad \text{also}$$

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \bmod 3.$$

Dieselben Kongruenzen gelten auch mod 9 und daher ergibt sich das bekannte Gesetz:

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \bmod 9.$$

Jede Zahl gibt bei der Teilung durch 9 denselben Rest wie die Ziffernsumme (Quersumme) der Zahl. Sie ist also teilbar durch 9, wenn es ihre Ziffernsumme ist.

Für die Zahl 27 erhält man:

$$10 \equiv 10, \; 10^2 \equiv 19, \; 10^3 \equiv 1, \; 10^4 \equiv 10, \; 10^5 \equiv 19, \; 10^6 \equiv 1 \bmod 27.$$

Daher ist

$$N \equiv a_0 + 10a_1 + 19a_2 + a_3 + 10a_4 + 19a_5 + a_6 + \cdots \bmod 27,$$

oder auch

$$N \equiv a_0 + 10a_1 - 8a_2 + a_3 + 10a_4 - 8a_5 + a_6 + \cdots \bmod 27.$$

Für 7 erhält man

$$10 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^4 \equiv 4,\ 10^5 \equiv 5,\ 10^6 \equiv 1 \bmod 7.$$

Daher

$$N \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + \cdots \bmod 7.$$

Hieraus ergibt sich keine einfache Regel für die Teilbarkeit der Zahlen durch 7.

Für 11 hat man

$$10 \equiv 10, \quad 100 \equiv 1, \quad 1000 \equiv 10, \ldots \bmod 11.$$

Also

$$N \equiv a_0 + 10a_1 + a_2 + 10a_3 + a_4 + \cdots \bmod 11$$

oder

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots \bmod 11.$$

Damit die Subtraktion immer ausführbar bleibt, addieren wir rechts 11, 22, 33, ..., wenn es nötig ist. Durch eine solche Addition bleibt die Kongruenz ungestört richtig. Die Regel für die Teilbarkeit der Zahlen durch 11 ist also eine der einfachsten. Andere einfache Gesetze findet man durch die Zerlegung der Zahlen $10^m + 1$ und $10^m - 1$ in ihre Primfaktoren. Die Länge der Perioden bei der Dezimalbruchentwicklung steht damit im Zusammenhang.

Weil 1001 durch 7, 13, 11 teilbar ist, gilt dasselbe von jeder 6stelligen Zahl, welche durch Wiederholung einer dreistelligen Zahl gebildet wird. 367 367 ist durch 7, 13, 11, 77, 91, 143 teilbar. Weil $10001 = 73 \cdot 137$ ist, so ist jede aus Wiederholung einer 4stelligen Zahl gebildete 8stellige durch 73 und 137 teilbar.

Sind a und b relative Primzahlen und ist N durch a und b einzeln teilbar, so ist N auch durch ab teilbar.

Wir zerlegen a, b, N in ihre Primfaktoren. Wenn p ein Teiler von a ist, so ist er nach der Voraussetzung ein Teiler von N, aber nicht von b. Dasselbe gilt von der Primzahlpotenz p^α. Hieraus ergibt sich, daß N alle Primzahlpotenzen p^α enthält, welche in a vorkommen. Ebenso zeigt man es für jede Primzahlpotenz q^β, die in b vorkommt. Folglich enthält N alle Primzahlpotenzen, aus denen das Produkt ab besteht.

Hieraus ergeben sich Teilbarkeitsregeln für die Zahlen

6, 12, 15, 45 usw.

Durch Anwendung der Kongruenzgesetze auf die Multiplikation erhält man praktische Rechnungsproben. Ist

$$a \equiv b \bmod c \quad \text{und} \quad d \equiv e \bmod c,$$

so ist auch

$$ad \equiv be \bmod c.$$

Hieraus ergibt sich die allgemeine Probe: Man bestimme durch Division mit einer beliebigen Zahl c die kleinsten Reste der Faktoren a, d und bilde deren Produkt. Dann muß das Produkt der Faktoren und das der Reste bei der Division mit c denselben Rest ergeben.

Von praktischer Bedeutung sind neben der Neunerprobe nur die Elfer- und die Siebenerprobe. Bei der Neuner- und Elferprobe gewinnt man die Reste ohne Division und bei der Siebenerprobe ist die Division im Kopfe leicht ausführbar.

§ 14. Irrationale Zahlen. Dritte Erweiterung des Zahlengebietes.

Gehen wir von der Gleichung $x^2 = D$ aus, in welcher D eine positive ganze Zahl sei. Wir behaupten: x ist entweder eine ganze Zahl oder die Gleichung $x^2 = D$ ist durch eine rationalen Bruch $\frac{p}{q}$ nicht lösbar.

Beweis. Die Zahlen p und q können immer so eingerichtet werden, daß sie relativ prim (ohne gemeinsamen Teiler) sind. Aus

$$\frac{p^2}{q^2} = D$$

folgt $p^2 = Dq^2$. Wenn nun q den Primteiler α enthält, so enthält ihn auch p^2, folglich nach dem Lehrsatze S. 31 auch p; das steht im Widerspruch mit der Annahme, p und q hätten keinen gemeinsamen Teiler. Ist D also eine Nichtquadratzahl, so ist die Gleichung $x^2 = D$ durch keine rationale Zahl lösbar.

Satz und Beweis lassen sich sofort auf die Gleichung $x^3 = D$, $x^4 = D$ usw. ausdehnen. Auch für eine Gleichung

$$(1) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

gilt folgender Lehrsatz:

Eine Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, in welcher x^n den Koeffizienten Eins hat, besitzt entweder ganzzahlige Lösungen oder ist durch keinen rationalen Bruch zu befriedigen.

Beweis. Wir machen über den Bruch $x = \frac{p}{q}$ dieselben Voraussetzungen wie vorhin. Dann müßte sein:

$$\frac{p^n}{q} = -a_1 p^{n-1} - a_2 p^{n-2} q - a_3 p^{n-3} q^2 - \cdots - a_n q^{n-1}.$$

Da p und q keinen gemeinsamen Teiler haben, so hat p^n mit q ebenfalls keine gemeinsamen Teiler, der Quotient $\frac{p^n}{q}$ kann also keine

ganze Zahl sein. Die rechte Seite unserer letzten Gleichung ist aber eine ganze Zahl, also ist die Annahme falsch, auf welcher sie beruht. Gleichung (1) besitzt also entweder ganzzahlige Lösungen oder sie ist durch rationale Zahlen nicht lösbar.

Der nunmehr in weitem Umfange erlangten Erkenntnis von der Unmöglichkeit gewisser rationaler Lösungen müssen wir nun die Ergänzung beifügen, daß man die Gleichungen $x^2 = D$, $x^3 = D$, ..., $x^n = D$ mit jedem beliebigen Grade der Annäherung durch rationale Zahlen lösen kann. Diese Behauptung schließt eine doppelte Aussage in sich.

1. Man kann stets zwei rationale Zahlen angeben, von denen die eine größer, die andere kleiner ist als die gesuchte Lösung und welche voneinander um weniger als eine vorher bestimmte beliebig kleine Zahl verschieden sind.

2. Erhebt man die gefundenen Näherungsbrüche in die n^{te} Potenz, so kann das Ergebnis dem D so nahe gebracht werden, daß der Unterschied kleiner ist als jede beliebig vorher festgesetzte noch so kleine Zahl.

Weil D nicht eine genaue n^{te} Potenz ist, so können wir eine positive ganze Zahl m finden von der Eigenschaft:

$$m^n < D < (m+1)^n.$$

Nun betrachten wir die Zahlen:

$$(2)\qquad m,\quad m+\frac{1}{g},\quad m+\frac{2}{g},\quad m+\frac{3}{g},\quad \cdots m+\frac{g-1}{g},\quad m+1$$

und erheben jede in die n^{te} Potenz. Weil x^n mit x monoton wächst, so muß ein und nur ein Paar α, $\alpha+1$ von Zahlen gefunden werden, welches die Eigenschaft hat:

$$\left(m+\frac{\alpha}{g}\right)^n < D < \left(m+\frac{\alpha+1}{g}\right)^n.$$

Untersuchen wir nun die Unterschiede zwischen den Zahlen (2), wenn sie in die n^{te} Potenz erhoben werden, genauer. Sei ein Produkt positiver Zahlen a, b gegeben. Wir lassen beide um $\frac{1}{g}$ wachsen. Dann erhält das Produkt den Zuwachs $\frac{a}{g}+\frac{b}{g}+\frac{1}{g^2}$. Wenn wir statt a, b die Zahlen c, d genommen hätten, $c > a$, $d > b$, so würde der Zuwachs größer geworden sein. Diese Bemerkung gilt allgemein für ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren. Folglich ist auch

$$\left(m+\frac{1}{g}\right)^n - m^n > \left(m_1+\frac{1}{g}\right)^n - m_1^{\,n},$$

wenn m, m_1, g positive Zahlen und $m > m_1$ ist. Von allen Zahlen der Reihe (2) geben also die beiden letzten, wenn sie in die n^{te} Potenz erhoben werden, die größte Differenz. Diese Differenz kann nun beliebig klein gemacht werden. Wir gehen wieder von dem Produkte ab aus. Sein Zuwachs ist $\frac{a}{g} + \frac{b}{g} + \frac{1}{g^2}$. Nehmen wir nun statt g die ganze Zahl gh, so entsteht der Zuwachs $\frac{a}{gh} + \frac{b}{gh} + \frac{1}{g^2h^2}$, und der ist kleiner als der h^{te} Teil des vorigen Zuwachses. Hieraus folgt, daß man durch Vergrößerung der Zahl g den Zuwachs des Produktes beliebig klein machen kann. Dieselben Schlüsse gelten für ein Produkt aus beliebig viel Faktoren. Also auch für $\left(x + \frac{1}{g}\right)^n - x^n$. Nun bewirken wir durch hinreichend große Annahme der Zahl g, daß die letzten zwei Zahlen in der Reihe:

$$(3)\quad m^n,\ \left(m + \frac{1}{g}\right)^n,\ \left(m + \frac{2}{g}\right)^n,\ \left(m + \frac{3}{g}\right)^n,\ \cdots,\ \left(m + \frac{g-1}{g}\right)^n,\ (m+1)^n$$

eine Differenz besitzen, welche $< \varepsilon$ ist. Dann besteht die Reihe (3) aus $g + 1$ wachsenden Zahlen, von denen jede die folgende um weniger als der kleine vorher festgesetzte Betrag ε übertrifft. Zwischen zwei solchen Zahlen liegt also D.

Wir können nun behaupten, die Zahl x sei durch die Gleichung $x^n = D$ in die Zahlenreihe eingeordnet. Durch diese Gleichung zerfallen alle rationalen positiven Zahlen in zwei Klassen a und b. Für alle a besteht die Ungleichung $a^n > D$, für alle übrigen ist $b^n < D$. Jedes a ist größer als jedes b, es gibt aber kein größtes b und kein kleinstes a. Wir haben die Erscheinung des Dedekindschen Schnittes vor uns. Die Zahl x ist mit jeder beliebigen Genauigkeit auffindbar, und wir wollen nun sehen, wie ihre Rechnungsgesetze sich gestalten.

Da wir die b und a einander beliebig nähern können, so hindert nichts, diese Näherung durch einen Bruch anzugeben, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine Potenz von 10 ist. Folglich kann die Zahl x in einen Dezimalbruch entwickelt werden, welcher jedoch weder geschlossen noch periodisch sein kann. Da nun der Dezimalbruch auf eine beliebige Anzahl Stellen entwickelt werden kann, so unterscheidet sich das Rechnen mit Irrationalitäten in keiner Weise von dem Rechnen mit abgekürzten Dezimalbrüchen.

Wir haben dieses Hauptgesetz ableiten können, ohne auf die Natur der Irrationalität weiter einzugehen und uns auf die aus $x^n = D$ entstehenden Irrationalitäten beschränkt. An späterer Stelle werden wir hierüber noch einige Festsetzungen zu treffen haben.

§ 15. Praktische Methoden der Wurzelausziehung.

Seit Erfindung der Logarithmen haben die Methoden zur Ausziehung höherer Wurzeln fast kein praktisches Interesse mehr. Selbst die Quadratwurzel wird man unbedenklich nur logarithmisch berechnen. Mathematisch sind dagegen die Methoden Beispiele für die Berechnung von Näherungswerten überhaupt und zeigen Beziehungen zu höheren Forschungsgebieten. Auf die praktische Einübung im Unterricht kann daher sowohl aus diesem Gesichtspunkt Gewicht gelegt werden als auch, weil diese Rechnungsart dem Anfänger Sicherheit im Zahlenrechnen verschafft und sein Interesse leicht erregen kann.

Zur Bestimmung der Quadratwurzel aus einer Zahl D stellt man sich zunächst einen Näherungswert a her, setzt dann $D = a^2 + b$ und bedient sich nun der Grenzgleichung:

$$(1) \qquad \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}.$$

Daß diese Ungleichung richtig ist, folgt durch beiderseitiges Quadrieren. Berechtigt ist dies Verfahren nur für positive Zahlwerte, die wir voraussetzen. Ferner ist identisch

$$\sqrt{a^2+b} - \left(a + \frac{b}{2a}\right) = \frac{a^2+b-\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2}{\sqrt{a^2+b}+a+\frac{b}{2a}};$$

folglich

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{4a^2\left(\sqrt{a^2+b}+a+\frac{b}{2a}\right)}.$$

Die negative Bruchgröße zeigt den Fehler; der Nenner ist kleiner als $4a^2\left(2a+\frac{b}{a}\right)$ und größer als $4a^2\left(2a+\frac{b}{2a}\right)$. Der Fehler f liegt also zwischen den Grenzen (f absolut genommen)

$$\frac{b^2}{2a(8a^2+b)} < f < \frac{b^2}{4a(2a^2+b)}.$$

Beispiel. $D = 7, \quad a = 2, \quad b = 3.$

$$\sqrt{7} < 2 + \tfrac{3}{4}$$

$$0{,}064 \cdots < f < 0{,}102 \ldots.$$

Es ist zweckmäßig, die oben angewandte Methode zu wiederholen, ehe man zur Fehlerbestimmung schreitet. Man bedient sich also der praktischen Regel:

Ist a ein Näherungswert für $\sqrt{D}$, so ist $a + \frac{D-a^2}{2a}$ ein besserer. Schreibt man die Näherung in der Form:

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{D}{a}\right),$$

so hat man genau das von Heron angewandte Verfahren (*Μετρικά*, Herons Vermessungslehre, ed. Schoene S. 19). In dem vorigen Beispiel finden wir hiernach als erste Annäherung für $\sqrt{7}$ die Zahl 2, als zweite $\frac{11}{4}$, als dritte $\frac{233}{88}$, dann $\frac{108497}{41008} = 2{,}6457520$, wo die letzte Stelle um sieben Einheiten zu groß ist.

Ginge man von der Zahl 3 als erster Näherung aus, so erhielte man die Näherungen:

$$3,\quad \frac{8}{3},\quad \frac{127}{48},\quad \frac{32257}{12192} = 2{,}645751312.$$

Die letzte Stelle ist um eine Einheit ungenau.

Unser modernes Verfahren zur Quadratwurzelberechnung beruht auf Anwendung der gleichen Methode bei Zugrundelegung des Ergebnisses in Dezimalbruchform. Der bereits gewonnene Teil heißt a, die folgende Ziffer heißt b und der Rest $D - a^2$ liegt durch die Gestaltung des Verfahrens immer berechnet vor. Vgl. meine Aufgabensammlung S. 106.

Ein drittes Verfahren habe ich ebenda S. 109 auseinandergesetzt. Es beruht auf folgendem Gedanken. Sei a irgend ein Näherungswert für $\sqrt{D}$, also $y < 1$ und

$$\sqrt{D} - a = y.$$

Nehmen wir nun beiderseits die n^{te} Potenz, so entsteht links eine Zahl von der Gestalt $A + B\sqrt{D}$, wo A und B gegebene Zahlen sind. Es wird also: $A + B\sqrt{D} = y^n$,

$$\sqrt{D} = -\frac{A}{B} + \frac{y^n}{B}.$$

Nun ist y eine kleine Größe, y^n also von beliebiger Kleinheit und kann daher ganz vernachlässigt oder mit Hülfe der Logarithmen annähernd berechnet werden. Ist D eine ganze Zahl und gleichfalls t, u ganze Zahlen, welche die Gleichung befriedigen (die ungeschichtlich so genannte Pellsche Gleichung)

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

so erhält man einen besonders günstigen Ausgangspunkt der Rechnung durch die Annahme

$$t - u\sqrt{D} = y.$$

Ein viertes Verfahren gründet sich auf folgenden Gedankengang. Multipliziert man $\sqrt{D}$ der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n, so erhält man, D als ganzzahlig, aber nicht quadratisch vorausgesetzt,

im Produkte eine ganze Zahl und einen Dezimalbruch. Wir können die ganze Zahl abtrennen und erhalten

$$m\sqrt{D} - p = \varepsilon, \quad \text{wo} \quad \varepsilon < 1.$$

Ebenso findet man

$$p + 1 - m\sqrt{D} = 1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 - \varepsilon < 1.$$

Man erhält also $2n$ positive Zahlen zwischen 0 und 1. Keine dieser Zahlen kann einer andern gleich sein, weil dann $\sqrt{D}$ als Bruch darstellbar wäre. Folglich müssen wenigstens zwei der Zahlen sich so nahe liegen, daß ihr Unterschied kleiner ist als $\frac{1}{2n-1}$. Denn die Brüche $\frac{\alpha}{2n-1}$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$ teilen den Zwischenraum 0 bis 1 in $2n - 1$ gleiche Teile und mindestens zwei unserer $2n$ Zahlen müssen in einem solchen Intervall Unterkunft finden. Subtrahieren wir also diese Zahlen voneinander, so haben wir die Ungleichung:

$$t - u\sqrt{D} < \frac{1}{2n-1}, \quad u < 2n.$$

Diese Ungleichung kann man nun nach dem vorigen Verfahren weiter behandeln. Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{7} - 2 = 0{,}6457513, & 3 - \sqrt{7} = 0{,}3542487, \\
2\sqrt{7} - 5 = 0{,}2915026, & 6 - 2\sqrt{7} = 0{,}7084974, \\
3\sqrt{7} - 7 = 0{,}9372539, & 8 - 3\sqrt{7} = 0{,}0627461, \\
4\sqrt{7} - 10 = 0{,}5830052, & 11 - 4\sqrt{7} = 0{,}4169948, \\
5\sqrt{7} - 13 = 0{,}2287566, & 14 - 5\sqrt{7} = 0{,}7712434, \\
6\sqrt{7} - 15 = 0{,}8745079, & 16 - 6\sqrt{7} = 0{,}1254921, \\
7\sqrt{7} - 18 = 0{,}5202592, & 19 - 7\sqrt{7} = 0{,}4797408, \\
8\sqrt{7} - 21 = 0{,}1660105, & 22 - 8\sqrt{7} = 0{,}8339895, \\
9\sqrt{7} - 23 = 0{,}8117618, & 24 - 9\sqrt{7} = 0{,}1882382, \\
10\sqrt{7} - 26 = 0{,}4575131, & 27 - 10\sqrt{7} = 0{,}5424869.
\end{array}$$

Die Differenz von $8\sqrt{7} - 21$ und $24 - 9\sqrt{7}$ ist

$$45 - 17\sqrt{7} = 0{,}0222277.$$

Es ist

$$(\sqrt{7} - 3)^2 = 2(8 - 3\sqrt{7}),$$
$$(\sqrt{7} - 3)^3 = 2(-45 + 17\sqrt{7}),$$

$t = 8$, $u = 3$ löst die Pellsche Gleichung

Derselbe Schluß, den wir vorhin anwandten, läßt sich auf die Zahlenreihe $10^\alpha \sqrt{D}$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ ausdehnen. Wir werden eine ganze Zahl A abtrennen können und erhalten:

$$10^\alpha \sqrt{D} - A = \varepsilon, \quad \text{wo} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Da nun zwei solche Zahlen ε niemals einander gleich sein können, sie aber alle im Bereiche 0 bis 1 liegen, so müssen, wenn wir α hinreichend groß nehmen, die Zahlen ε immer näher zusammenrücken und wenigstens zwei derselben auf beliebig viel Stellen übereinstimmen. Entwickelt man also $\sqrt{D}$ in einen Dezimalbruch mit hinreichender Stellenzahl, so muß Wiederkehr der Ziffern in langen, aber nicht unbegrenzten Ketten stattfinden. Die Gesetze, nach denen die Ziffern auftreten, scheinen sehr verwickelt zu sein und sind noch unerforscht. Ähnliche Schlüsse gelten übrigens für alle Irrationalzahlen.

Die Berechnung der Wurzeln durch Kettenbrüche und den binomischen Lehrsatz kann hier noch nicht behandelt werden.

Aus Brüchen zieht man die Wurzel nach folgendem Verfahren. Sei

$$x^2 = \frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2},$$

also

$$x = \frac{\sqrt{pq}}{q} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

Man kann also, wenn p, q ganze Zahlen sind, drei verschiedene Methoden anwenden.

1. Man zieht aus p und q getrennt die Wurzeln und bestimmt den Quotienten der erhaltenen Zahlen.

2. Man zieht aus dem Produkte pq die Wurzel und dividiert das Ergebnis durch q.

3. Man verwandelt $p : q$ in einen Dezimalbruch und zieht aus diesem die Wurzel.

Nur die beiden letzten Methoden haben praktische Bedeutung.

§ 16. Die imaginären Zahlen. Vierte Erweiterung des Zahlengebietes.

Betrachten wir die Gleichung:

(1) $$x^2 + 1 = 0.$$

Sie wird durch keine positive und auch durch keine negative Zahl erfüllt. Wir sind daher berechtigt, die Lösung für unmöglich zu erklären und damit die Untersuchung zu schließen. Nun zeigt sich aber durch Weiterentwicklung der Arithmetik, daß ihre Gesetze erst dann den Charakter der Einfachheit und Geschlossenheit erlangen

wenn wir die durch (1) gegebene Größenklasse nicht ausschließen. Sagen wir also $x = i$ sei eine Lösung von (1) und untersuchen die Eigenschaften, welche die Rechnungsgesetze dieser Zahl i beilegen.

Ist i eine Lösung von (1), so ist auch $-i$ eine solche. Denn

$$(-i)^2 = (-1)^2 (i)^2 = i^2.$$

Durch Anwendung der Potenzgesetze auf $x^2 = -1$ findet sich

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1;$$

(2) $$i^{4h+k} = i^k.$$

Ebenso ist

$$\frac{1}{i} = -i, \quad i^{-2} = -1, \quad i^{-3} = i \text{ usw.}$$

Die Gleichung (2) gilt für jedes ganzzahlige Paar h, k.

Die Zahl $a + bi$, in welcher a und b reell sind, heißt eine komplexe Zahl. Es gilt der **Hauptsatz:**

Sind zwei komplexe Zahlen einander gleich, so ist der reelle Teil gleich dem reellen, der imaginäre gleich dem imaginären.

Beweis. Aus $a + bi = c + di$ folgt $a - c = (d - b)i$. Quadriert man beiderseits, so folgt $(a - c)^2 = -(d - b)^2$, also

(3) $$(a - c)^2 + (d - b)^2 = 0.$$

Nun sind a, b, c, d nach Voraussetzung reelle Zahlen, also ist $(a - c)^2$ positiv oder Null, desgleichen $(d - b)^2$. Ist also a von c oder d von b verschieden, so enthält (3) einen Widerspruch. Es muß also $a = c$ und $b = d$ sein.

Die komplexen Zahlen befolgen die Gesetze der Addition, Multiplikation und Potenzierung nach unserer Voraussetzung. Wir behaupten, daß auch die Ergebnisse der umgekehrten Rechnungsarten komplexe Zahlen sind. Für die Subtraktion bedarf dies keines Beweises. Für die Division beachten wir

(4) $$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Nun ist

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

$a + bi$ und $a - bi$ heißen konjugierte Zahlen, $a^2 + b^2$ ihre Norm, $\sqrt{a^2 + b^2}$ positiv genommen ihr absoluter Betrag, abgekürzt: A. B. Die Zahlen

$$ai - b, \quad -a - bi, \quad -ai + b,$$
$$ai + b, \quad -a + bi, \quad -ai - b$$

unterscheiden sich von $a + bi$ und $a - bi$ nur durch hinzugefügte Multiplikatoren i, -1, $-i$.

Die Form:

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

welche immer erteilt werden kann, heißt die **Normalform der komplexen Zahl.**

Für die komplexen Zahlen gilt das vierte Multiplikationsgesetz. Sei

$$(a + bi)(c + di) = 0.$$

Wir behaupten, dann sei entweder gleichzeitig $a = 0$, $b = 0$ oder gleichzeitig $c = 0$, $d = 0$, oder beides $a = b = c = d = 0$.

Nach Ausführung der Multiplikation folgt

$$0 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Also nach unserm Hauptsatze (S. 46)

$$ac - bd = 0, \quad ad + bc = 0.$$

Folglich

$$a(ac - bd) + b(ad + bc) = (a^2 + b^2)c = 0,$$

$$-b(ac - bd) + a(ad + bc) = (a^2 + b^2)d = 0.$$

Die erste Folgerung $(a^2 + b^2)c = 0$ ergibt, daß entweder gleichzeitig $a = 0$, $b = 0$ sein muß oder $c = 0$. Ist ersteres der Fall, so ist die Behauptung bewiesen. Ist $a^2 + b^2$ von 0 verschieden, so zeigt sich, daß nach der ersten Folgerung $c = 0$ und nach der zweiten $(a^2 + b^2)d = 0$ auch $d = 0$ sein muß.

Es fragt sich nun, ob die komplexen Größen sich in die Zahlenordnung einreihen, ob also, wenn zwei komplexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ gegeben sind, von den drei Größenvergleichungen $A = B$, $A > B$, $A < B$ Gebrauch gemacht werden kann. Diese Frage muß verneint werden. Dagegen können die komplexen Zahlen geometrisch in einer Weise dargestellt und dadurch zugleich geordnet werden, welche zu den wichtigsten Folgerungen führt.

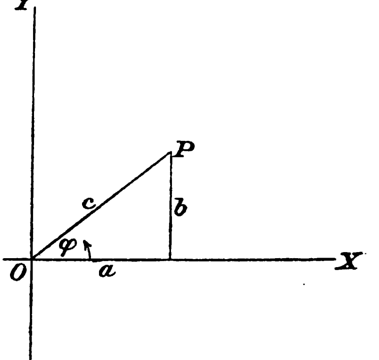


Fig. 4.

Man nimmt in der Ebene zwei zueinander senkrechte Achsen an und setzt vom Durchschnittspunkte (Nullpunkte) die positiven Richtungen willkürlich fest. Dann fällt man von einem willkürlichen Punkte der Ebene P auf die Achsen Senkrechte, welche in der Sprache der analytischen Geometrie die Koordinaten des Punktes P heißen. Die X-Koordinate (der

Abschnitt auf der X-Achse, s. Figur) sei a, die Y-Koordinate b. Dann setzen wir willkürlich fest, $a + bi$ werde von P dargestellt. Durch diese Festsetzung sind die Punkte der Ebene den komplexen Zahlen eindeutig zugeordnet und umgekehrt. Wir erkennen nun sofort, daß $a + bi$ auf zahllosen Wegen, die ganz im Endlichen verlaufen, durch stetige Änderung in die Zahl $c + di$ übergeführt werden kann. Verbindet man P mit O, so ist

(5) $$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

also stellt die Strecke OP den a. B. von $a + bi$ dar. Zieht man den Winkel φ zur Betrachtung heran, so ist

(6) $$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Daher

(7) $$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{\varphi i}.$$

Diese Form (vgl. S. 47) heißt die Normalform der komplexen Größe. Sie kann immer erteilt werden und zwar bei positivem r. Sind a und b beide positiv, so liegt φ im ersten Quadranten; ist a negativ, b positiv, so liegt φ im zweiten Quadranten, für a negativ und b negativ im dritten, für a positiv, b negativ im vierten. Soll nun beispielsweise $-7 - 8i$ in die Normalform treten, so setzen wir

$$\varphi = 180 + \psi; \quad \psi \text{ spitz},$$

und erhalten

$$r \cos \psi = 7, \quad r \sin \psi = 8,$$

$$r = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}, \quad \operatorname{tg} \psi = \tfrac{8}{7}.$$

Für $-7 + 8i$ würde $\varphi = 180 - \psi$;

„ $-7 - 8i$ „ $\varphi = 180 + \psi$;

„ $+7 - 8i$ „ $\varphi = 360 - \psi$.

Die vier komplexen Zahlen $\pm a \pm bi$ liegen auf einem Kreise mit dem Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Der Anfänger ist vor dem Mißverständnisse zu warnen, als seien die Strecken bi in der Ebene aufzufinden. In der Ebene gibt es nur reelle Strecken und reelle Punkte, denen man komplexe Zahlen zuordnet.

Wir wollen jetzt sehen, wie die Rechnungsarten geometrisch dargestellt werden. Das soll heißen: Gegeben seien die Punkte P und Q. Ersterer entspreche der Zahl $a + bi$, letzterer der Zahl $c + di$. Man finde durch geometrische Konstruktion einen Punkt, welcher

der Zahl $a + c + (b + d)i$ entspreche. Die Lösung ist in Fig. 5 der Punkt R, welcher das Dreieck OPQ als O gegenüberliegende Ecke zum Parallelogramm ergänzt. Ebenso ist S die Darstellung von $a + bi - (c + di)$ und T von $c + di - (a + bi)$ aufzufinden. Anschaulich kann man dies so aussprechen. P möge der komplexen Zahl p, Q der komplexen Zahl q entsprechen. Dann erhält man die Summe $p + q$, indem man von P oder Q aus die Strecken OQ oder OP in gleichem Sinne mit diesen Richtungen abträgt. Das Wort **Richtung** kann man genauer festlegen wie folgt. Jede Gerade zerlegt die Ebene in zwei Teile. Seien auf der Geraden zwei Punkte O und Q gegeben. P sei ein Punkt einer der durch OQ bestimmten Halbebenen. Zieht man durch Q eine Parallele zu OP, so gibt es nur einen Punkt R, welcher mit P in derselben Halbebene auf der Parallelen so liegt, daß $QR = OP$ ist. Wir sagen dann, QR habe gleiche Richtung mit OP.

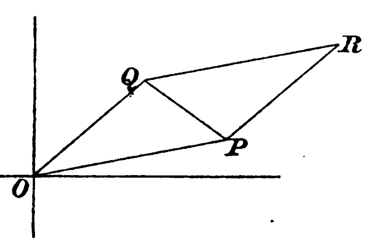


Fig. 5.

Die Summation von drei und mehr Zahlen, welche den Punkten $A, B, C, D, \ldots$ entsprechen, ist nun leicht auszuführen. Man trage von A aus in gleicher Richtung mit OB die Strecke OB ab, wobei der Punkt K erhalten werde; dann trage man von K in gleicher Richtung mit OC die Strecke OC ab usw. Es ist gleichgültig, von welchem Punkte man ausgeht und in welcher Reihenfolge man die Summation vornimmt. Das Verfahren ist genau dasselbe wie bei Aufsuchung der Mittelkraft für n gegebene Einzelkräfte. Da wir festgesetzt haben, daß die komplexen Zahlen den Punkten der Ebene **zugeordnet** sind, so sind wir nicht berechtigt in den Begriff der Zuordnung mehr zu legen als unsere Festsetzung erlaubt. Von einer Streckenaddition kann also nicht die Rede sein.

Schreiten wir nun zur Feststellung eines sehr wichtigen Satzes: **Die Summe der absoluten Beträge ist im allgemeinen größer als der absolute Betrag der Summe**

$$|a + bi| + |c + di| > |a + c + (b + d)i|.$$

Der Satz ist geometrisch sofort klar. In Fig. 5 ist

$$|a + bi| = OP, \quad |c + di| = OQ \quad \text{und} \quad |a + c + (b + d)i| = OR.$$

Doch gibt auch die Rechnung sofort einen Beweis:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} > \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

Die Quadrierung ergibt nach Vereinfachung:

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} > ac+bd,$$

also

$$(ad-bc)^2 > 0.$$

Diese im allgemeinen zutreffende Ungleichung läßt sofort die Ausnahme $ad = bc$ oder $a:b = c:d$ erkennen. In diesem Falle haben $a + bi$ und $c + di$ in der Normalform den gleichen Wert φ, dasselbe Argument. P und Q liegen in gerader Linie mit 0.

Der Satz ist sofort auf beliebig viele Summanden auszudehnen. Die komplexen Zahlen seien $p_1, p_2, p_3, \ldots$, ihre absoluten Beträge $(p_1), (p_2), (p_3)$ usw., so ist

$$(p_1)+(p_2) \geqq (p_1+p_2),$$

$$(p_3)+(p_1+p_2) \geqq (p_1+p_2+p_3),$$

also gewiß

$$(p_1)+(p_2)+(p_3) \geqq (p_1+p_2+p_3).$$

Für die Differenz der absoluten Beträge gilt ein ähnlicher Satz, den Fig. 5 sofort erkennen läßt. Es ist $PQ = |a - c + (b-d)i|$ und geometrisch also

$$|a-c+(b-d)i| \geqq |a+bi| - |c+di|.$$

Der Satz ist von geringer Wichtigkeit.

Schreiten wir zur Untersuchung der Multiplikation. Sei

$$a+bi = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{\varphi_1 i},$$

$$c+di = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{\varphi_2 i}.$$

Dann ist

(8) $$|a+bi|\,|c+di| = r_1 r_2,$$

(9) $$(a+bi)(c+di) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r_1 r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}.$$

Hierzu sind folgende Bemerkungen zu machen:

1. Bei der Multiplikation ergibt sich

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(ad+bc),$$

also nach Bildung der konjugierten Größen und Multiplikation:

(10) $$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Hieraus folgt der arithmetische Satz, daß für ganze Zahlen das Produkt der Summe zweier Quadrate sich wieder als Summe zweier Quadrate darstellt. Die Form $x^2 + y^2$ mit sich selbst komponiert, erzeugt sich als solche wieder.

2. Bei der Multiplikation von zwei komplexen Größen erhält man im Produkte das Argument, welches gleich der Summe der Argumente der Faktoren ist. Dieser Satz ist sofort auf das Produkt beliebig

vieler komplexer Zahlen anwendbar. Die Multiplikation wird also geometrisch durch eine Drehung um den Nullpunkt dargestellt.

3. Der a. B. des Produkts ist gleich dem Produkte der absoluten Beträge der Faktoren. Auch dieser Satz ist sofort auf ein Produkt aus beliebig viel Faktoren ausdehnbar. Die geometrische Bedeutung ist zwar durch die Fassung:

$$\sqrt{a^2+b^2}:1=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}:\sqrt{c^2+d^2}$$

einer Konstruktion zugänglich, aber es bleibt wahr, daß der reingeometrische Charakter fehlt. Man erkennt dies sofort durch Vergleichung mit den reingeometrischen Deutungen, welche wir für die Addition, Subtraktion und bei der Multiplikation für die Bildung des Arguments erhalten haben. Die Multiplikation erfordert also eine solche Drehung, daß die Summe der Argumente der Faktoren als Argument erscheint und gleichzeitig eine Streckung des a. B., so daß das Produkt der absoluten Beträge der Faktoren a. B. des Produkts wird.

Hiermit ist zugleich die Division erledigt. Auch die Potenzierung bedarf keiner weiteren Erläuterung. Bemerkenswert ist jedoch besonders der Fall, daß der a. B. der Grundzahl 1 ist, $|a+bi|=1$.

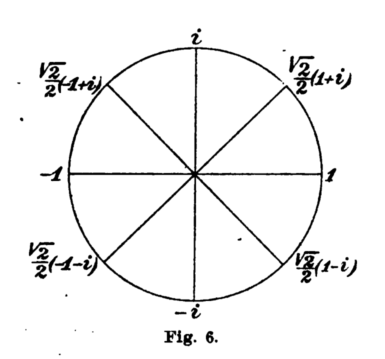


Fig. 6.

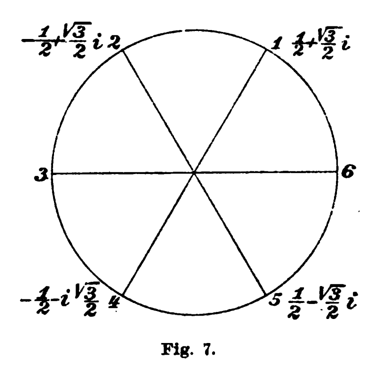


Fig. 7.

In diesem Falle liegen alle Potenzen von $a+bi$ auf dem Einheitskreise. Steht das Argument zu π in einem rationalen Verhältnis, so gelangt immer, vielleicht nach einer großen Zahl von Umläufen der Punkt $a+bi$ an seinen Ausgangspunkt zurück. Der einfachste Fall ist die Zahl i selbst. i, i^2, i^3, 1, i gehen durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ (90° in künstlichem Maß, Fig. 6) auseinander hervor. Dieselbe Figur enthält die Potenzen von $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, wobei jedesmal eine Drehung um $\frac{\pi}{4} \sim 45°$ erforderlich ist. In Figur 7 haben wir die Potenzen von $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ vor uns. In der dritten Potenz liefert diese

Zahl -1, in der sechsten $+1$. Ebenso zeigt die Figur, daß $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in der zweiten Potenz $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und in der dritten 1 liefert. Dagegen liefert $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ nach einer Drehung um 240° die 2te Potenz $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und nach einer nochmaligen Drehung um 240°, also nach zwei ganzen Umläufen 1. Dies gilt allgemein. Sei die Gleichung zu lösen:

$$x^n = 1 \tag{11}$$

und n eine ganze positive Zahl. Wir setzen

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

dann wird nach dem Hauptsatze der komplexen Größen und unter Anwendung des Moivreschen Lehrsatzes aus

$$r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = 1$$

$$r^n\cos(n\varphi) = 1, \quad r^n\sin(n\varphi) = 0.$$

Quadriert man und addiert, so folgt, da $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$r^{2n} = 1.$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung $r = 1$, weil r positiv sein soll und r^{2n} mit r im Falle positiver Zahlen monoton ins Unendliche wächst. Die Gleichungen

$$\cos(n\varphi) = 0, \quad \sin(n\varphi) = 0$$

sind erfüllt für die Werte $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2h\pi$. Daraus folgt

$$\varphi = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots \frac{(2n-2)\pi}{n}. \tag{12}$$

Hier haben wir n Werte vor uns; und mehr als n verschiedene liefert das Verfahren nicht; auch können nicht mehr gefunden werden, weil (11) als Gleichung n^{ten} Grades nur n Wurzeln hat, vgl. unten S. 124. Die Gleichung $x^n = 1$ hat also die Lösungen:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \tag{13}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dieses Ergebnis ist für die Theorie der binomischen Gleichungen entscheidend. Die Lösung der Gleichung $x^n = 1$ ist völlig gleichbedeutend mit der Teilung des Kreisumfangs in n gleiche Teile. Ist insbesondere $x^n = 1$ auf die Lösung eines Gefüges von quadratischen Gleichungen zurückführbar, so ist die Teilung des Kreisumfangs in n gleiche Teile mit Zirkel und Lineal ausführbar.

Der Vollständigkeit wegen mag hier gleich die Lösung der Gleichung

$$x^n = a + bi = re^{\varphi i}$$

angeschlossen werden. Es ergibt sich

$$x = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{1}{n}\varphi i + \frac{2\pi i}{n}k},$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Daher ist außer der Teilung des Vollkreises in n Teile auch die Teilung eines gegebenen Winkels in n gleiche Teile erforderlich. Die Aufgabe ist deshalb von wesentlich höherer Schwierigkeit als die Lösung der Gleichung $x^n = 1$. Nennen wir eine Wurzel der Gleichung $\alpha^n = 1$ etwa α, so ist die Lösung der Gleichung $x^n = a + bi$ in der Form darstellbar

(14) $$x = \alpha^k \sqrt[n]{a + bi},$$

wo $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ und $\sqrt[n]{a+bi}$ irgend eine der Wurzeln, etwa

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

bedeutet. Ist n keine Primzahl, so dürfen für α nur primitive Wurzeln der Gleichung $\alpha^n = 1$ genommen werden, wenn die Gleichung (14) alle Lösungen darstellen soll. Hierüber wird weiter unten die Rede sein. Figur 5 gibt die drei Lösungen der Gleichung

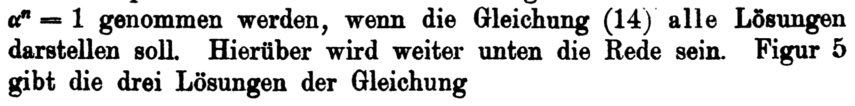


Fig. 8.

$$x^3 = \frac{4 + 3i}{5}.$$

Die Dreiteilung des Winkels ist mechanisch bewirkt.

§ 17. Die Logarithmen.

Die Gleichung $a^b = c$ haben wir in anderer Schreibart $a = \sqrt[b]{c}$ dargestellt. Noch eine dritte Schreibart ist denkbar. Es kann angenommen werden, a und c seien gegeben und b soll ermittelt werden. Dies ist etwa $b = {}^a\log c$ (gelesen b ist a Logarithmus von c) auszudrücken. Es ist jedoch nicht zweckmäßig, in dieser Weise fortzufahren. Denn eine weitere Untersuchung zeigt, daß ein einziges Logarithmensystem genügt und außer diesem nur ein zweites aus praktischen Gründen Bedeutung erlangt hat. Fangen wir mit dem letzteren, dem Zehnerlogarithmus an (dekadischer Logarithmus, logarithmus tabularis, Buchlogarithmus).

a sei eine positive Zahl. Dann ist der Zehnerlogarithmus erklärt durch die Gleichung

(1) $$10^{\log a} = a.$$

Wie wir § 14 gesehen haben, lassen sich Quadratwurzeln mit jeder beliebigen Genauigkeit aus gegebenen Zahlen ziehen und die gewonnenen Ergebnisse folgen den Rechnungsgesetzen. Wir haben S. 30, § 12 die Bedeutung gebrochener Exponenten kennen gelernt und können mithin die zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$$

der Grundzahl 10 sofort auf Quadratwurzelziehung zurückführen. Beispielsweise ist

$$10^{\frac{5}{16}} = \sqrt[16]{100000} = \sqrt[8]{\sqrt{100000}} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{100000}}} \text{ usw.}$$

Anderseits kann jeder gegebene positive echte Bruch mit jeder beliebigen Genauigkeit zwischen zwei aufeinander folgende Brüche mit dem Nenner 2^n eingeschaltet werden, wenn n hinreichend groß genommen wird. Daher steht der theoretischen Berechnung jeder Potenz von 10, deren Exponent eine gegebene Zahl zwischen 0 und 1 ist, nichts entgegen. Die erhaltenen Potenzen bilden eine stetige Folge, weil die $2^{n\text{te}}$ Wurzel aus 10 mit wachsendem n sich der Eins mit jeder beliebigen Genauigkeit nähert. Durchläuft also der Exponent alle Zahlen von Null bis Eins, so durchwandert die Potenz stetig wachsend alle Zahlen von Eins bis Zehn. Es besteht daher eine stetige, und weil die Potenz mit dem Exponenten monoton wächst, eine eindeutige Zuordnung von $\log a$ zu a durch die Gleichung (1). Hiermit ist aber das Gleiche für jede positive Zahl a bewiesen, denn jede positive Zahl kann dargestellt werden als Produkt von einer zwischen 1 und 10 liegenden Zahl und einer geeigneten Potenz von 10. Nach den Tafeln ist z. B.

$$10^{0,8450980} = 7.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit Potenzen von 10

$$10^{1,8450980} = 70; \qquad 10^{2,8450980} = 700 \text{ usw.}$$

$$10^{0,8450980-1} = 0,7; \quad 10^{0,8450980-2} = 0,07 \text{ usw.}$$

Dem so gekennzeichneten Umstande verdankt das System der Zehnerlogarithmen seine praktische Beliebtheit. Jeder Zahl im Zehnergefüge entspricht der Logarithmus in der Weise, daß man sofort seine Gestalt als Dezimalbruch angeben kann. Nennt man die Ganzen des Logarithmus seine Charakteristik und den übrigen Teil seine Mantisse, so brauchen die Logarithmentafeln nur die Mantissen zu enthalten.

Die Charakteristik für eine ganze mit n Ziffern geschriebene Zahl ist $n-1$; ebenso für einen Bruch, der vor dem Komma eine solche Zahl hat. Beginnt der Dezimalbruch mit n Nullen, die vor dem Komma stehende Null eingerechnet, so ist die Charakteristik $-n$.

Die logarithmischen Sätze ergeben sich wie folgt. Aus den Erklärungsgleichungen

$$10^{\log a} = a, \quad 10^{\log b} = b$$

folgt durch Multiplikation $10^{\log a + \log b} = ab$, also ist der Exponent $\log a + \log b$ die Zahl, welche nach (1) der Logarithmus von ab ist,

(2) $$\log(ab) = \log a + \log b.$$

Aus $ax = b$ folgt durch Anwendung von (2)

$$\log a + \log x = \log b,$$

also

$$\log x = \log b - \log a,$$

(3) $$\log\left(\frac{b}{a}\right) = \log b - \log a.$$

Aus (1) folgt durch Erhebung in die n^{te} Potenz

$$10^{n \log a} = a^n,$$

folglich nach derselben Erklärungsgleichung

(4) $$\log(a^n) = n \log a.$$

Ebenso folgt aus $x^n = a$ durch Anwendung von (4)

$$n \log x = \log a, \quad \log x = \frac{1}{n} \log a$$

oder

(5) $$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

Wir können nunmehr den a-Logarithmus auf den Zehnerlogarithmus zurückführen. Sei $a^b = c$, dann ist b der a-Logarithmus von c; anderseits ist nach (4)

$$b \log a = \log c,$$

also

$$b = \frac{\log c}{\log a}.$$

Der a-Logarithmus ist also der Quotient der Zehnerlogarithmen von c und a. Sind die Zehnerlogarithmen gegeben, so findet man aus ihnen durch Multiplikation mit dem festen Zahlfaktor $\frac{1}{\log a}$ die sämtlichen a-Logarithmen.

Die übrigen Gesetze können erst unten nach Entwicklung der logarithmischen Reihen vorgetragen werden.

§ 18. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Wenn ein Gefüge von n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben ist, so können wir es uns in nachstehender Form entwickelt denken:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Die gegebenen Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}, b_1, b_2, \ldots b_n$ sehen wir als ganze Zahlen oder Dezimalbrüche an. Das übersichtlichste Lösungsverfahren ist jedenfalls die sogenannte Ersetzungsmethode.

In der ersten wagerechten Zeile greifen wir ein x_r heraus, dessen (Koeffizient) Vorzahl nicht Null ist. Es muß mindestens ein solches vorhanden sein. Wir können also x_r durch die übrigen x und b_1 ausdrücken. Dann ersetzen wir x_r in den übrigen Gleichungen durch den gewonnenen Ausdruck und erhalten so nach gehöriger Ordnung ein Gefüge von $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten. Hierin tritt keine Änderung ein, wenn x_r überhaupt nicht oder in einigen der Gleichungen nicht auftritt. Eine Ausnahme könnte nur eintreten, wenn alle Koeffizienten der x Null würden. Um diesen Fall zu untersuchen, entnehmen wir x_1 der ersten wagerechten Zeile und setzen seinen Wert in die zweite ein. Dann wäre nach gehöriger Ordnung

$$(2)\quad (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2 + (a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x_3 + \cdots + (a_{11}a_{2n}-a_{21}a_{1n})x_n = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Diese Gleichung würde nichtssagend, wenn alle Vorzahlen und die rechte Seite Null wären. In diesem Falle ist

$$a_{22} = a_{12}\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}},\quad a_{23} = a_{13}\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}},\quad \ldots,\quad a_{2n} = a_{1n}\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}},\quad b_2 = b_1\cdot\frac{a_{21}}{a_{11}}.$$

Folglich geht die zweite Gleichung aus der ersten durch Multiplikation mit $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ hervor. Die zweite Gleichung ist also Folge der ersten, nicht unabhängig.

Wenn nur eine Vorzahl nicht verschwindet, so haben wir keinen Ausnahmefall vor uns. Wenn die rechte Seite nicht verschwindet, aber alle Vorzahlen links Null sind, so genügen endliche Werte von x der Gleichung nicht. Ob eins oder mehrere der x unendlich groß werden, bedarf besonderer Untersuchung. Man kann die Vorzahlen der Gleichung (2) bequem in Determinantenform schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Alle zweigliedrigen Unterdeterminanten sind im ersten Ausnahmefalle null. Nehmen wir an, der Ausnahmefall liege nicht vor, so können wir aus (2) eine der Unbekannten bestimmen, die eine nicht verschwindende Vorzahl hat. Sei dies x_2. Den so gewonnenen Wert setzen wir in die übrigen $n-2$ Gleichungen ein und erhalten so ein Gefüge von $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ Unbekannten. Bei wirklicher Ausführung erkennt man, daß ein gemeinsamer Faktor a_{11} sich abtrennen läßt und die übrigen wieder in Determinantenform sich schreiben lassen. Die weitere Ausführung gehört in die Determinantentheorie und hat für die Schulmathematik geringe Bedeutung. Große Wichtigkeit hat die Berechnung der Unbekannten aus gegebenen linearen Gleichungen, besonders in der praktischen Mathematik. Ein vollständiges Beispiel mit 6 Unbekannten nach eigentümlicher Methode behandelt Jordan, Vermessungslehre I, 105.

Sind nur zwei Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten gegeben, so bedient man sich mit Vorliebe der Methode der gleichen Koeffizienten.

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad b_2$$

$$a_2 x + b_2 x = c_2; \quad b_1.$$

Multipliziert man mit den beigeschriebenen Zahlen und subtrahiert die Ergebnisse, so wird gefunden

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Ebenso kann man durch Multiplikation mit a_2 und a_1 für beide Gleichungen dem x die Vorzahl $a_1 a_2$ geben und erhält:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = - c_1 a_2 + c_2 a_1.$$

Auch bei 3 Unbekannten ist ein ähnliches Verfahren möglich. Es lohnt sich für die Schule nicht, das Verfahren zu entwickeln, weil man doch genötigt ist, eine Determinante dritter Ordnung auszurechnen.

Gleichungen mit 3 Unbekannten liefert die Schulmathematik in reicher Fülle. Es mag dieserhalb auf die Sammlungen verwiesen werden.

§ 19. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten sind solche geordnete Gleichungen, welche die Unbekannte in nicht höherer als der zweiten Potenz enthalten. Eine Gleichung ordnen heißt, sie so umformen, daß rechts null und links eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende ganze Funktion von x erscheint. Zu diesem Zwecke sind folgende Maßnahmen zu treffen.

1. Kommen rationale Funktionen von x vor, so ist mit dem Hauptnenner zu multiplizieren.

2. Kommen Wurzelzeichen vor, so behandelt man sie, wenn sie die Unbekannte nicht enthalten, wie gewöhnliche gegebene Zahlen. Steht aber die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen, so haben wir eine Aufgabe, welche weiter unten bei der Elimination zu behandeln ist. Man kann die Ordnung der Gleichung kurz und übersichtlich so beschreiben:

1. Alle Additionen und Subtraktionen sind so auszuführen, daß links vom Gleichheitszeichen jede Potenz der Unbekannten nur einmal und zwar mit einer bekannten Vorzahl erscheint. Diese Vorzahl kann auch ein Klammerausdruck sein.

2. Alle Klammern, welche die Unbekannte enthalten, müssen aufgelöst sein.

3. Nenner, welche die Unbekannte nicht enthalten, werden als gewöhnliche gegebene Zahlen behandelt. Nenner, welche die Unbekannte enthalten, müssen beseitigt werden. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich nicht, den Hauptnenner zu suchen. Man beseitige irgend einen willkürlich herausgegriffenen Nenner und bringe dann an den übrigen Brüchen mögliche Vereinfachungen an. Dann beseitige man einen zweiten Nenner usw.

Beispiel:

$$\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x^2-16}+\frac{c}{x^2-9x+20}+\frac{d}{x^2+8x+16}=0.$$

Man multipliziert zuerst mit $x-4$. Beim zweiten Bruche bemerkt man, daß der Nenner $(x-4)(x+4)$ ist, beim dritten, daß der Nenner $(x-4)(x-5)$ ist. Daher nach Vereinfachung:

$$a+\frac{b}{x+4}+\frac{c}{x-5}+\frac{d(x-4)}{x^2+8x+16}=0.$$

Nun multipliziert man mit $x+4$ und bemerkt, daß der vierte Bruch den Nenner $(x+4)(x+4)$ hat. Also:

$$a(x+4)+b+\frac{c(x+4)}{x-5}+\frac{d(x-4)}{x+4}=0.$$

Nunmehr müssen wir noch mit $(x+4)(x-5)$ multiplizieren, wobei Vereinfachungen nicht vorkommen. Hätte man die vorhin erwähnten Zerlegungen der Nenner nicht bemerkt, so wäre das Ergebnis weit unbequemer geworden. In diesem Falle hätte auch das Aufsuchen des Hauptnenners nichts genutzt; denn nur die Bemerkung der Zerlegungen kann den einfachsten Hauptnenner liefern. Ein Verfahren zur Aufsuchung gemeinsamer Faktoren ganzer Funktionen kann erst weiter unten gelehrt werden.

4. Wurzelzeichen, unter denen die Unbekannte steht, sind zu beseitigen. Siehe unten Elimination.

Sei nun die Gleichung gegeben:

(1) $$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Wir multiplizieren mit $4A$ und erhalten:

$$4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0,$$
$$(2Ax + B)^2 - B^2 + 4AC = 0,$$
$$2Ax + B = \sqrt{B^2 - 4AC},$$

(2) $$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Probe. Wir quadrieren (2) und erhalten:

$$x^2 = \frac{B^2 - 2AC - B\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A^2};$$

aus (2) $$x = \frac{-AB + A\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A^2}.$$

Bildet man nun $Ax^2 + Bx$, so hebt sich die Wurzel fort und nach Vereinfachung bleibt $-C$ allein übrig.

Besprechung der Lösung. 1. Ist $B^2 - 4AC$ positiv, so erhält man zwei reelle Lösungen; ist es negativ, zwei komplexe. Ist $B^2 - 4AC = 0$, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln. $B^2 - 4AC$ ist also ein sehr wichtiger Ausdruck, die Diskriminante der Gleichung.

2. Legen wir der Wurzel den positiven Wert bei, d. h. ist sie reell, so ist die Wurzel die positive Quadratwurzel, ist sie imaginär, so ist die Wurzel eine positive Zahl multipliziert mit i. Dann ist

(4) $$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Also

(3) $$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \quad x_1 x_2 = \frac{C}{A}.$$

$x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ sind die einfachsten symmetrischen Funktionen der Wurzeln. Alle andern lassen sich aus ihnen rational zusammensetzen. So ist

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1x_2.$$

3. Ist $C = 0$, so folgt

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{B}{A}.$$

4. Ist $B = 0$, so folgt

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{C}{A}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

5. Aus (4) folgt:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A}.$$

Aus der vorigen Untersuchung erhellt, daß man einfachere Ergebnisse zu erwarten hat, wenn man $A = 1$ nimmt. Dies ist immer möglich. Denn A darf nicht Null sein. Man kann also in (1) A durch Division beseitigen. Daher kann jede eigentliche Gleichung zweiten Grades in die Form gesetzt werden:

$$(5) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Die Lösung ergibt zunächst durch Subtraktion von q

$$x^2 + px = -q,$$

dann durch Addition von $\frac{p^2}{4}$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = -q + \frac{p^2}{4},$$

oder

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4}.$$

Daraus folgt dann in anderer Schreibart

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}},$$

oder mit Zeichenbestimmung der Wurzel

$$(6) \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}, \\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}. \end{cases}$$

Wiederum ist

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q, \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}.$$

Die Mehrzahl der Schulmänner zieht statt (1) und (5) die Form vor

$$(7) \qquad x^2 + px = q.$$

Diesen Vorzug verdient diese Form für den Anfangsunterricht zweifellos, und darum wird man sie auch an der Schule wohl stets in dieser Form weiter bis in die höchsten Schulklassen beibehalten. Dann ist

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = -q, \quad x_1 - x_2 = 2\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}, \\ x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}. \end{cases}$$

Man kann die Entwicklung der Formel noch mannigfach abändern. Setzen wir $x = y + \alpha$ in die Gleichung $x^2 + px = q$ ein, so erhält man

$$y^2 + (2\alpha + p)y = q - p\alpha - \alpha^2.$$

Nehmen wir nun $2\alpha + p = 0$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, so folgt

$$y^2 = q + \frac{p^2}{4}; \quad \text{also} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Suchen wir ferner mit

$$x^2 + px - q = 0$$

die Form $(x - x_1)(x - x_2)$ in völlige Übereinstimmung zu bringen, so gelingt dies für die Annahme

$$x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = x^2 + px - q$$

nur dann, wenn

$$-p = x_1 + x_2, \quad -q = x_1 x_2.$$

Nun ist aber

$$p^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2,$$

$$-4q = \qquad 4x_1 x_2,$$

$$(x_1 - x_2)^2 = p^2 + 4q, \quad x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 + 4q}.$$

Durch Zusammenstellung mit $x_1 + x_2 = -p$ kommt man auf (8) zurück. Die Gleichung:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px - q$$

besteht hiernach für jeden Wert von x. Diese Bemerkung ist nicht unwichtig. Ist q positiv, so sind die Wurzeln der Gleichung reell und es ist ein Wurzelwert positiv, der andere negativ. Ist q negativ und sind die Wurzeln reell, so haben sie unter sich gleiches und mit p verschiedenes Vorzeichen.

Sind die beiden Wurzeln der Gleichung x_1 und x_2 vorgeschrieben, so ist die Gleichung leicht zu bilden. Sie wird $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Soll z. B. die Gleichung gebildet werden, welche die Wurzeln $+7$ und -11 hat, so setzen wir

$$(x - 7)(x + 11) = 0, \quad x^2 + 4x = 77.$$

Sind die Vorzahlen der Gleichung ganze Zahlen und ist eine Wurzel der Gleichung irrational, so ist es auch die andere. Dies folgt aus der Gleichung

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \quad \text{oder} \quad x_1 x_2 = \frac{C}{A}.$$

Ist eine Gleichung gegeben, deren eine Wurzel eine bestimmte Irrationalität hat, so muß die andere dieselbe Irrationalität besitzen, wenn A, B, C ganze Zahlen sein sollen. Setzen wir $B^2 - 4AC = D$,

so ist jede Wurzel mit der einzigen Irrationalität $\sqrt{D}$ behaftet. Es ist leicht, aus der gegebenen Gleichung andere abzuleiten, welche dieselbe Irrationalität haben. Setzen wir

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

so erhalten wir eine solche Gleichung. Ihre Wurzel ist

$$y = \frac{\beta - \delta x}{\gamma x - \alpha}.$$

Die Gleichung selbst lautet:

$$(A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2)y^2 + (2A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C\gamma\delta)y$$
$$+ A\beta^2 + B\beta\delta + C\delta^2 = 0$$

und die Lösung:

$$y_1 = \frac{(\beta - \delta x_1)(\gamma x_2 - \alpha)}{(\gamma x_1 - \alpha)(\gamma x_2 - \alpha)} = \frac{-\gamma\delta x_1 x_2 + \alpha\delta x_1 + \beta\gamma x_2 - \alpha\beta}{x_1 x_2 \cdot \gamma^2 - \alpha\gamma(x_1 + x_2) + \alpha^2}.$$

Nun ist

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(x_1 - x_2) = \alpha\delta x_1 + \beta\gamma x_2 - \alpha\delta x_2 - \beta\gamma x_1,$$
$$(\alpha\delta + \beta\gamma)(x_1 + x_2) = \alpha\delta x_1 + \beta\gamma x_2 + \alpha\delta x_2 + \beta\gamma x_1,$$

also

$$y_1 = \frac{-2\gamma\delta x_1 x_2 - 2\alpha\beta + (\alpha\delta + \beta\gamma)(x_1 + x_2) + (\alpha\delta - \beta\gamma)(x_1 - x_2)}{2\gamma^2 x_1 x_2 - 2\alpha\gamma(x_1 + x_2) + 2\alpha^2}.$$

Nun ist unter Anwendung der Gleichungen (3), S. 59:

$$y_1 = \frac{-2\gamma\delta C - 2\alpha\beta A - (\alpha\delta + \beta\gamma)B + (\alpha\delta - \beta\gamma)\sqrt{B^2 - 4AC}}{+2C\gamma^2 + 2B\alpha\gamma + 2\alpha^2 A}.$$

Für y_2 ändert sich nur der Wurzelausdruck in den entgegengesetzt gleichen um.

Wenn eine Gleichung zweiten Grades ganzzahlige Vorzahlen hat, kann man sie stets in eine andere mit derselben Eigenschaft umformen, so daß die Vorzahl von x^2 Eins wird. Sei

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben. Wir setzen $x = \frac{y}{A}$, so wird

$$y^2 + By + CA = 0.$$

Hat man $x^2 + px + q = 0$, so muß wegen $x_1 x_2 = q$ sowohl x_1 wie x_2 gefunden werden, wenn man q in seine sämtlichen Faktoren zerlegt oder x_1 und x_2 sind irrational. Diese Bemerkung ist zuweilen nützlich, wenn die Wurzel einer quadratischen Gleichung eine ganze Zahl ist und man die Gleichung durch Erraten lösen will.

Wenn eine Lösung zwei voneinander unabhängige Irrationalitäten hat, so kann sie nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung mit

ganzen Vorzahlen sein. $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ist eine solche Lösung. Sie ist Wurzel der Gleichung $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Die umgekehrte Aufgabe heißt, Gleichungen höheren Grades anzugeben, deren Lösung nur quadratische Irrationalitäten enthält. Sie hat ein besonderes wissenschaftliches Interesse.

§ 20. Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten hat, wenn sie geordnet ist, die Form:

$$ax^2 + by^2 + c + 2\gamma xy + 2\beta x + 2\alpha y = 0. \tag{1}$$

Die Untersuchung dieser Gleichung beginnen wir mit der Frage, ob es möglich ist, eine solche Gleichung in zwei lineare Faktoren zu zerlegen. Diese Frage ist in der Tat von höchster Bedeutung. Gelingt die Zerlegung, dann haben wir statt einer Gleichung zweiten Grades zwei Gleichungen ersten Grades vor uns. Multipliziert man (1) mit a, b oder c, so hat man je einen Zugang zu einer solchen Zerlegung. Wir entscheiden uns für die erste Maßregel. Es ist, wenn wir die linke Seite von (1) mit F bezeichnen,

$$a^2x^2 + 2a\gamma xy + 2a\beta x + aby^2 + ac + 2a\alpha y = aF,$$

$$a^2x^2 + 2a\gamma xy + 2a\beta x + \gamma^2 y^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma y = (ax + \gamma y + \beta)^2;$$

also:

$$aF - (ax + \gamma y + \beta)^2 = (ab - \gamma^2)y^2 + 2(a\alpha - \beta\gamma)y + ac - \beta^2.$$

Die Zerlegung ist nun sofort möglich, wenn die rechte Seite ein negatives Quadrat ist. Denn dann erscheint aF als Differenz zweier Quadrate. Dies kann nur geschehen, wenn die rechte Seite identisch ist mit

$$-\left(\sqrt{\gamma^2 - ab}\, y + \sqrt{\beta^2 - ac}\right)^2.$$

Führt man nämlich die Quadrierung aus, so stimmt das mit y^2 behaftete und das Freiglied. Über das mit y behaftete Glied können wir nicht verfügen und haben abzuwarten, welche Bedingung uns durch die Entwicklung auferlegt wird. Es findet sich:

$$a\alpha - \beta\gamma = -\sqrt{\gamma^2 - ab}\sqrt{\beta^2 - ac}. \tag{2}$$

Nach vollzogener Quadrierung und Ordnung ergibt sich:

$$a^2\alpha^2 + \gamma^2 ac + \beta^2 ab - 2a\alpha\beta\gamma - a^2bc = 0.$$

Dividieren wir durch a, so folgt:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 - abc - 2\alpha\beta\gamma = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung muß also erfüllt sein, wenn die Zerlegung in der angegebenen Weise gelingen soll. Die Zerlegung selbst hat also die Form:

$$aF = (ax + \gamma y + \beta)^2 - (\sqrt{\gamma^2 - ab}\, y + \sqrt{\beta^2 - ac})^2;$$

d. h. die Faktoren sind:

$$ax + (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - ab})y + \beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}.$$

Die Vorzeichen sind durch (2) an eine bestimmte Zuordnung gebunden. Ist das Vorzeichen von $\sqrt{\gamma^2 - ab}$ willkürlich festgesetzt, so ist dasjenige von $\sqrt{\beta^2 - ac}$ durch (2) gegeben. Die gefundene Bedingung (3) ist wirklich die umfassendste. Sie ist genügend, wie unsere Ableitung zeigt; sie ist aber auch immer erfüllt, wenn eine Gleichung zweiten Grades zerlegbar ist. Denn bildet man eine solche

$$(mx + ny + p)(m'x + n'y + p') = F$$

und entwickelt, so genügen die Koeffizienten der Gleichung (3). Die Gleichung (3) verdient eine eingehende Untersuchung. Multiplizieren wir (3) mit b, so folgt:

$$(4) \qquad (b\beta - \alpha\gamma)^2 = (\alpha^2 - bc)(\gamma^2 - ab);$$

ebenso folgt durch Multiplikation mit c

$$(5) \qquad (c\gamma - \alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - bc)(\beta^2 - ac).$$

Durch Multiplikation von (4), (5) mit der quadrierten (2) ergibt sich nach Ausziehung der Wurzel die zeichenrichtige Gleichung:

$$(\alpha^2 - bc)(\beta^2 - ac)(\gamma^2 - ab) - (a\alpha - \beta\gamma)(b\beta - \alpha\gamma)(c\gamma - \alpha\beta) = 0.$$

Auch kann man noch folgende Gleichungen erhalten:

$$(6) \quad \begin{cases} \beta\gamma - a\alpha = \sqrt{\gamma^2 - ab}\sqrt{\beta^2 - ac}, \quad \alpha\gamma - b\beta = \sqrt{\gamma^2 - ab}\sqrt{\alpha^2 - bc}, \\ \alpha\beta - c\gamma = \sqrt{\beta^2 - ac}\sqrt{\alpha^2 - bc}. \end{cases}$$

Die Vorzeichen der Wurzeln bestimmen sich aus diesen Gleichungen eindeutig, wenn man ein einziges von ihnen willkürlich festsetzt. In Wirklichkeit ist auch nur eine einzige Irrationalität vorhanden. Dies zeigen auch die nachstehenden Gleichungen, welche man aus (6) ableiten kann:

$$(7) \quad \begin{cases} (\gamma\alpha - b\beta)\sqrt{\beta^2 - ac} = (\beta\gamma - a\alpha)\sqrt{\alpha^2 - bc}; \\ (\alpha\beta - c\gamma)\sqrt{\gamma^2 - ab} = (\beta\gamma - a\alpha)\sqrt{\alpha^2 - bc}. \end{cases}$$

Zahlenbeispiel:

$$a = 11, \quad b = -6, \quad c = 3, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 6, \quad \gamma = 9.$$

Es ist zu zerlegen:

$$11x^2 - 6x^2 + 3 + 18xy + 12x + 6y;$$

$$\sqrt{\gamma^2 - ab} = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}, \quad \sqrt{\alpha^2 - bc} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

$$\sqrt{\beta^2 - ac} = \sqrt{3}.$$

Die Faktoren sind:

$$11x + (9 + 7\sqrt{3})y + 6 + \sqrt{3}, \quad 11x + (9 - 7\sqrt{3})y + 6 - \sqrt{3}.$$

Passende Zahlenbeispiele mit Irrationalitäten erhält man aus

$$(8) \qquad a = \frac{2\alpha\beta\gamma - b\beta^2 - c\gamma^2}{\alpha^2 - bc},$$

indem man α, β, γ, b, c willkürlich annimmt und endlich den entstehenden Nenner als gemeinsamen Multiplikator beseitigt. Mit Hülfe von (8), die für alle zerlegbaren Ausdrücke F immer erfüllt ist, kann man leicht alle bis jetzt erlangten Gleichungen auf die einfachste Form bringen. Es ist noch

$$aF = (ax + \gamma y + \beta)^2 - (\gamma^2 - ab)\left(y - \frac{\alpha\beta - c\gamma}{\alpha\gamma - b\beta}\right)^2.$$

Nachdem die Zerlegbarkeit einer allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten hinreichend untersucht ist, können wir uns der Aufgabe zuwenden, die Lösung eines Gefüges zweier solcher Gleichungen zu finden ohne Rücksicht auf Zerlegbarkeit.

Diese Aufgabe zerfällt in zwei durchaus verschiedene Teile. Der erste Teil verwandelt das gegebene Gefüge in eine Gleichung mit einer Unbekannten. Der zweite Teil strebt die Lösung dieser Endgleichung an. Während der erste Teil immer erledigt werden kann, führt die Lösung der Endgleichung auf Schwierigkeiten ganz anderer Art.

Erstes Verfahren. Es soll an dem folgenden Beispiel erklärt werden:

$$(9) \qquad \begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 - x + 2y - 8 = 0, \\ x^2 + xy + 2y^2 - 4x - y - 5 = 0. \end{cases}$$

Wir ordnen nach fallenden Potenzen von x und erhalten:

$$3x^2 - x(y + 1) + y^2 + 2y - 8 = 0,$$

$$x^2 + x(y - 4) + 2y^2 - y - 5 = 0.$$

Nach irgend einem Lösungsverfahren, etwa dem der gleichen Vorzahlen, folgt

$$(10) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-5y^2 + 5y + 7}{4y - 11}, \\ x^2 = \dfrac{-3y^3 + y^2 + 22y - 27}{4y - 11}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen drücken x^2 und x rational durch y aus. Ist also eine der Unbekannten bestimmt, so ist es auch die andere. Aus (10) folgt nach Quadrierung der ersten

$$(5y^2 - 5y - 7)^2 = (4y - 11)(-3y^3 + y^2 + 22y - 27),$$

oder entwickelt:

$$(11) \qquad 37y^4 - 87y^3 - 122y^2 + 420y - 248 = 0;$$

die linke Seite zerfällt in das Produkt

$$(y-1)(y-2)(37y^2 + 24y - 124).$$

Die Lösung ergibt

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = \frac{-12 + 26\sqrt{7}}{37}, \quad y_4 = \frac{-12 - 26\sqrt{7}}{37}.$$

Hierzu liefert die erste der Gleichungen (10) die zugehörigen Werte von x und man findet als Lösung die Paare:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_3 = \dfrac{15 - 14\sqrt{7}}{37} \\ y_3 = \dfrac{-12 + 26\sqrt{7}}{37} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_4 = \dfrac{15 + 14\sqrt{7}}{37} \\ y_4 = \dfrac{-12 - 26\sqrt{7}}{37} \end{matrix}\right\}.$$

Hierzu ist folgendes zu bemerken:

1. Zwei Gleichungen höheren Grades mit zwei Unbekannten werden immer gelöst durch eine Anzahl von einander zugeordneten Wertepaaren. Die Anzahl dieser Wertepaare ist im allgemeinen gleich dem Grade der Endgleichung und dieser ist gleich dem Produkte der Grade der gegebenen Gleichungen. Dieses Ergebnis ist leicht abzuleiten für ein Gefüge von drei Gleichungen mit drei Unbekannten und sofort zu verallgemeinern.

2. Das Verfahren selbst läßt sich auf Gleichungen höheren Grades ausdehnen. Als Beispiel wählen wir das von M. Stifel (Tropfke I, 268) herrührende:

$$(x+y)(x^2-y^2) = a, \quad (x-y)(x^2+y^2) = b.$$

Unter Verzicht auf Kunstgrifflösungen finden wir nach Ausführung der Klammern:

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = a, \quad x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = b.$$

Wollten wir die Potenzen von x als Unbekannte nehmen, so hätten wir zwei Gleichungen mit drei Unbekannten x, x^2, x^3. Diesem Übelstande können wir abhelfen durch Multiplikation beider Gleichungen mit x. Dann haben wir weiter

$$x^4 + x^3y - x^2y^2 - xy^3 = ax, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 = xb.$$

Diese vier Gleichungen mit vier Unbekannten können wir lösen.

$$x^4 = -x^3y + x^2y^2 + xy^3 + ax.$$

Nach Einsetzung folgt

$$-2x^3y + 2x^2y^2 + (a-b)x = 0,$$
$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 - a = 0,$$
$$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 - b = 0.$$
$$x^3 = x^2y - xy^2 + y^3 + b.$$

Nach Einsetzung in die beiden andern:

$$2x^2y - 2xy^2 + b - a = 0,$$
$$x(2y^3 + a - b) - 2y^4 - 2by = 0.$$

Die zweite Gleichung ist ersten Grades. Sie ergibt

$$x = \frac{2y^4 + 2by}{2y^3 + a - b}.$$

Diesen Wert können wir in die vorangehende einsetzen und finden:

$$8y^6(2b-a) + 4y^3(2b-a)(a+b) - (a-b)^3 = 0.$$

Die Lösung ist 6ten Grades, während das Produkt der Gradzahlen $3 \cdot 3 = 9$ ist. 3 Wurzeln der Gleichung liegen im Unendlichen. Eine Kunstgrifflösung ergibt sich leicht. Es ist

$$(x-y)^3 = 2b - a, \quad (x+y)^2(x-y) = a.$$

Seien allgemein 2 Gleichungen gegeben, eine m^{ten}, eine n^{ten} Grades in den beiden Unbekannten x, y. Sei $m \geqq n$. Dann haben wir m Unbekannte $x, x^2, x^3, \ldots x^m$ und nur 2 Gleichungen. Wir multiplizieren zunächst die zweite Gleichung mit $x, x^2, \ldots x^{m-n}$. Das gibt weitere $m - n$ Gleichungen. Dann multiplizieren wir jede der gegebenen Gleichungen mit $x, x^2, \ldots x^p$. Dann haben wir $2 + m - n + 2p$ Gleichungen mit $p + m$ Unbekannten. Das Gefüge ist also bestimmt, wenn genommen wird

$$p = n - 2.$$

Zweites Verfahren. Auch hier wollen wir ein Beispiel und zwar dasselbe wie oben zugrunde legen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit λ und addieren zur zweiten, so kommt:

$$(12) \qquad (3\lambda+1)x^2 + (-\lambda+1)xy + (\lambda+2)y^2 - (\lambda+4)x + (2\lambda-1)y - (8\lambda+5) = 0.$$

In dieser Gleichung ist λ willkürlich. Wir verfügen über λ so, daß (12) zerfällt. Nach unsern Bezeichnungen S. 63 wäre

$$a = 6\lambda + 2, \quad b = 2\lambda + 4, \quad c = -16\lambda - 10,$$
$$\alpha = 2\lambda - 1, \quad \beta = -\lambda - 4, \quad \gamma = -\lambda + 1.$$

Nach gehöriger Entwicklung wird daher λ bestimmt aus der Gleichung:

(13) $$99\lambda^3 + 292\lambda^2 + 248\lambda + 64 = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\lambda = -\frac{8}{11}$. Die Gleichung zerfällt in das Produkt

$$(11\lambda + 8)(9\lambda^2 + 20\lambda + 8) = 0.$$

Also

$$\lambda_1 = -\frac{8}{11}, \quad \lambda_2 = \frac{-10 + 2\sqrt{7}}{9}, \quad \lambda_3 = \frac{-10 - 2\sqrt{7}}{9}.$$

Setzen wir die Werte der λ in die Gleichung (12) ein, so erhalten wir zerfallende Gleichungen. Für λ_1 wird gefunden

$$13x^2 - 14y^2 - 9 - 19xy + 36x + 27y = 0$$

oder nach Ausführung der Zerlegung:

(14) $$(13x + 7y - 3)(x - 2y + 3) = 0.$$

Führt man ebenso für λ_2 und λ_3 die Zerlegung durch, so erhält man entsprechende Ergebnisse, die mit (14) verbunden werden können. Man erkennt, daß nach der Lösung von (13) die Werte der x, y durch Gleichungen ersten Grades bestimmt werden. Gleichung (13) ist die Resolvente der gegebenen beiden Gleichungen (9). Geometrisch stellt (14) und ebenso die beiden andern ein Linienpaar dar, welches durch die 4 Punkte gelegt ist, die den beiden Kegelschnitten (9) gemeinsam sind.

Sind die beiden gegebenen Gleichungen homogen, so kann man noch anders verfahren. Sei

(15) $$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 7y^2 = 15, \\ 5x^2 - xy - y^2 = 17. \end{cases}$$

Wir dividieren die linken und rechten Seiten und setzen

$$x = zy.$$

Dann wird

$$\frac{3z^2 - 2z + 7}{5z^2 - z - 1} = \frac{15}{17}.$$

Hieraus bestimmen wir

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -\frac{67}{24}.$$

Dann liefert die erste (15)

$$y^2(3z^2 - 2z + 7) = 15$$

das übrige. Im ganzen werden 4 Wertepaare gewonnen.

Der Eliminationslehre gehört auch das Verfahren an, aus gegebenen Gleichungen Wurzelgrößen fortzuschaffen. Sei die gegebene Gleichung

(16) $$2\sqrt{3x+4} - 3\sqrt{x+5} + 1 = 0.$$

Wir setzen

$$y = \sqrt{3x+4}, \quad z = \sqrt{x+5}.$$

Dann erhalten wir das Gefüge

$$2y - 3z + 1 = 0, \quad y^2 = 3x + 4, \quad z^2 = x + 5.$$

Es ergibt sich

$$x = z^2 - 5, \quad 3x = y^2 - 4,$$

also

$$3z^2 - y^2 = 11.$$

Setzen wir in diese Gleichung für y den Wert aus der ersten ein, so folgt

$$z^2 + 2z = 15,$$

also

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -5.$$

Demnach erhalten wir als Lösung die beiden Dreiheiten:

$$z_1 = 3, \quad y_1 = 4, \quad x_1 = 4;$$

$$z_2 = -5, \quad y_2 = -7, \quad x_1 = 20.$$

Machen wir auf (16) die Probe, so folgt:

$$2\sqrt{16} - 3\sqrt{9} + 1 = 0,$$

$$-2\sqrt{64} + 3\sqrt{25} + 1 = 0.$$

Die Vorzeichen der Quadratwurzeln sind durch die für y und z gefundenen Werte eindeutig bestimmt.

Sei die Gleichung gegeben

(17) $$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = 0.$$

Man erhält zunächst das Gefüge:

$$x + a = y^2, \quad x + b = z^2, \quad x + c = u^2, \quad y + z + u = 0.$$

Dann durch Bildung der Endgleichung:

$$3y^4 - 2(2a - b - c)y^2 - (b - c)^2 = 0,$$

$$3y^2 = 2a - b - c \pm 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}.$$

$$3x = -a - b - c \pm 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}.$$

Man hätte die Bildung der Endgleichung auch durch nachstehendes Verfahren bewirken können. Sei gegeben die Gleichung:

(18) $$A + B + C = 0.$$

Wir bilden das Produkt:

$$(19)\quad (A+B+C)(-A+B+C)(A-B+C)(A+B-C) = \\ -A^4-B^4-C^4+2A^2B^2+2B^2C^2+2C^2A^2.$$

Rechts kommen nur gerade Potenzen der A, B, C vor; die linke Seite ist nach (18) Null. Folglich setzen wir:

$$(20)\quad \begin{cases} -A^4-B^4-C^4+2A^2B^2+2B^2C^2+2C^2A^2=0, \\ A=\sqrt{x+a},\quad B=\sqrt{x+b},\quad C=\sqrt{x+c}. \end{cases}$$

Nach gehöriger Ausrechnung kommt man auf dieselbe Endgleichung für x. Geometrisch sagt die erste Gleichung (20) aus, daß das aus den Seiten A, B, C gebildete Dreieck den Inhalt Null hat; was mit (18) stimmt.

Sei gegeben:

$$(21)\quad \sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0.$$

Man erhält das Gefüge:

$$(22)\quad \begin{cases} x+a=y^2,\quad x+b=z^2,\quad x+c=u^2,\quad x+d=v^2 \\ y+z+u+v=0. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$y^2+z^2-u^2-v^2=2uv-2yz,$$

oder nach nochmaliger Quadrierung

$$(a+b-c-d)^2=4(x+a)(x+b)+4(x+c)(x+d)-8yzuv\cdot$$

Nach gehöriger Ordnung kann man nochmals quadrieren und findet dann eine Gleichung ersten Grades für x. Dabei sind die Vorzeichen der 4 Wurzeln noch nicht bestimmt. Den Vorzug verdient folgendes Verfahren. Aus

$$z+u+v=-y$$

kann man durch Multiplikation mit z, u, v drei neue Gleichungen entwickeln. Die drei neuen Unbekannten zu, uv, vz kann man dann daraus bestimmen und findet z. B.

$$2uv=2yz+a+b-c-d.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit z und verfährt entsprechend mit den beiden andern, so kann man 3 Ausdrücke für $2zuv$ ableiten. Die Vergleichung dieser Ausdrücke führt zu linearen Gleichungen für u, v, z. Man findet z. B.

$$2(b-c)y+(a+b-c-d)z-(a-b+c-d)u=0.$$

Endlich kann man alle durch eine ausdrücken, etwa durch y und findet z. B.

$$\frac{y}{z}=\frac{(a+b-c-d)^2-4(a-c)(a-d)}{(a+b-c-d)^2-4(b-c)(b-d)}.$$

Nach leichter Rechnung ergibt sich dann

$$x + a = \frac{\{(a+b-c-d)^2 - 4(a-c)(a-d)\}^2}{8(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)}.$$

Hierin liegt die völlige Lösung der Aufgabe. Man hat den Wert der Unbekannten x und die Vorzeichen aller Wurzeln.

Ist gegeben

(23) $$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} = c,$$

so setzt man in ähnlicher Weise $y = \sqrt[3]{x+a}$, $z = \sqrt[3]{x+b}$ und hat das Gefüge:

$$y^3 = x + a, \quad z^3 = x + b, \quad y + z = c.$$

Man findet $y^3 - z^3 = a - b$, also

$$y^3 - (c - y)^3 = a - b.$$

Die Gleichung wird dritten Grades in y. Dagegen führt

$$\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = c$$

zu einer Gleichung zweiten Grades. Es ist nach obiger Einsetzung

$$y^3 - z^3 = a - b, \quad y - z = c.$$

Da nun

$$(y - z)^3 = y^3 - z^3 - 3yz(y - z),$$

also

$$c^3 = a - b - 3cyz$$

ist, so folgt leicht eine Endgleichung für y oder z.

Schwierigkeiten nicht höherer Art machen die Gleichungen

$$\sqrt[3]{\alpha x + \beta} \pm \sqrt[3]{\gamma x + \delta} = \varepsilon.$$

Sei gegeben

(24) $$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} = d.$$

Wir erhalten das Gefüge

$$x + a = y^3, \quad x + b = z^3, \quad x + c = u^3,$$
$$y + z + u = d.$$

Dies verwandelt sich sofort in das folgende:

$$y^3 - z^3 = a - b, \quad y^3 - u^3 = a - c, \quad y + z + u = d.$$

Suchen wir die Endgleichung für y. Es ist

$$z^3 = y^3 - a + b, \quad u^3 = y^3 - a + c, \quad z + u = d - y.$$

Man findet $z^3 + u^3 + 3zu(d - y) = (d - y)^3$, also

$$zu = \frac{-3y^3 + 3dy^2 - 3d^2y + d^3 + 2a - b - c}{3d - 3y}.$$

Hieraus ergibt sich eine Endgleichung 7ten Grades für y.

Zu den am häufigsten gelösten Schulaufgaben gehören solche von der Form

$$x^n + y^n = a, \quad x + y = b.$$

Man setze $\frac{b}{2} + z = x$, $\frac{b}{2} - z = y$, dann erhält man sofort

$$\left(\frac{b}{2} + z\right)^n + \left(\frac{b}{2} - z\right)^n = a.$$

Diese Gleichung ist für $n = 2, 3, 4, 5$ auf quadratische zurückführbar.

Entsprechend löst man $x^n - y^n = a$, $x - y = b$ durch die Annahme

$$x = z + \frac{b}{2}, \quad y = z - \frac{b}{2}.$$

Ein häufig anzuwendender Kunstgriff besteht im allgemeinen darin, durch Einführung einer neuen Unbekannten dafür zu sorgen, daß eine Gleichung von selbst erfüllt ist. Außer den früheren Beispielen sei erwähnt

$$(25) \quad \begin{cases} ax^2 + by^2 + c + \alpha y + \beta x + \gamma xy = 0, \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Setzt man $x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} r$, $y = \frac{2z}{1 + z^2} r$, so ist die zweite Gleichung von selbst erfüllt und für die erste erhält man sofort die Eliminante vierten Grades.

Viele und interessante Aufgaben dieser Art liefert sowohl die analytische Geometrie wie die gewöhnliche Dreiecksgeometrie. Für die Schule kommen allerdings nur wenige in Betracht. Wir erwähnen die Aufgaben, ein Dreieck zu bestimmen aus den 3 Mittellinien, aus den 3 Höhen, aus den 3 Abständen des Mittelpunkts des Inkreises von den Ecken, den 3 Abständen des Mittelpunkts des Umkreises von den Seiten. Erwähnt sei auch das Taktionsproblem. Die Malfattische Aufgabe kann man auf die Form bringen:

$$x + y + 2\sqrt{\frac{\sigma - c}{\sigma}}\sqrt{xy} = c$$

und zwei ähnlich gebaute Gleichungen, wobei

$$2\sigma = a + b + c.$$

Folglich

$$\left(\sqrt{y} + \sqrt{\frac{\sigma - c}{\sigma}}\sqrt{x}\right)^2 = c\left(1 - \frac{x}{\sigma}\right).$$

Ebenso erhält man durch

$$\left(\sqrt{z} + \sqrt{\frac{\sigma - b}{\sigma}}\sqrt{x}\right)^2 = b\left(1 - \frac{x}{\sigma}\right)$$

eine zweite ähnlich gebaute Gleichung, mit deren Hülfe sich eine lineare, homogene Gleichung für $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ finden läßt. Siehe Pampuch, das Malfatti-Steinersche Problem, Straßburg 1902 und Isenkrahe, Progr. Trier 1906.

§ 21. Gleichungen höheren Grades, welche auf quadratische zurückführbar sind.

Wir beginnen mit der für die Schule wichtigsten Klasse, den reziproken Gleichungen. Eine reziproke Gleichung ist eine solche von der Form:

$$a_0(x^n + 1) + a_1(x^{n-1} + x) + a_2(x^{n-2} + x^2) + \cdots = 0.$$

Die Potenzen der Unbekannten haben paarweise, die höchste mit der niedrigsten, die zweithöchste mit der ersten usw. gleiche Vorzahlen. Beispiele:

$$a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Die reziproken Gleichungen ungeraden Grades gestatten links die Abtrennung des Faktors $x + 1$, worauf eine Gleichung geraden Grades derselben Gattung übrig bleibt. Ein Beispiel möge dies klar machen. Sei gegeben:

$$a_0(x^5 + 1) + a_1(x^4 + x) + a_2(x^3 + x^2) = 0.$$

Dann ist

$$a_0(x^5 + 1) + a_1x(x^3 + 1) + a_2x^2(x + 1) = 0.$$

Trennt man $x + 1$ ab, so ergibt sich:

$$a_0(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + a_1x(x^2 - x + 1) + a_2x^2 = 0.$$

Damit ist die Behauptung für das Beispiel bewiesen, und die gezogenen Schlüsse gelten allgemein.

Wir werden im folgenden nur Gleichungen vom Grade $2n$ zu betrachten haben. Fangen wir wieder mit einem Beispiele an:

$$(1) \qquad a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Die Lösung kann nach zwei Methoden bewirkt werden.

Erstens dividiert man durch x^2 und führt dann die neue Unbekannte $y = x + \frac{1}{x}$ ein.

Zweitens setzt man die Lösung in der Form

$$a_0(x^2 + yx + 1)(x^2 + zx + 1) = 0$$

voraus und sucht die y, z zu bestimmen.

Nach der ersten Methode ist

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

also

$$a_0\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0,$$

oder

$$a_0 y^2 + a_1 y + a_2 - 2a_0 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte für y, welche in die Gleichung $x^2 + 1 - xy = 0$ einzusetzen sind.

Nach der zweiten Methode gibt die Entwicklung

$$a_0 x^4 + a_0(y+z)x^3 + a_0(2+zy)x^2 + a_0(y+z)x + a_0 = 0,$$

also muß sein

$$a_0(y+z) = a_1, \quad a_0(2+zy) = a_2.$$

Hieraus folgt sofort eine quadratische Gleichung für y und z. Im Wesen sind die beiden Methoden nicht verschieden.

Für höhere Gleichungen muß man die steigenden Potenzen von y bestimmen. Man findet:

$$y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y,$$

also

$$y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Multipliziert man beiderseits mit y, so folgt

$$y^4 - 3y^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2},$$

also

$$y^4 - 4y^2 + 2 = x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

Ebenso:

$$y^5 - 5y^3 + 5y = x^5 + \frac{1}{x^5}$$

$$y^6 - 6y^4 + 9y^2 - 2 = x^6 + \frac{1}{x^6}.$$

Das allgemeine Gesetz der Entwicklung ist folgendes.

Sei $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$, dann ist $y = 2\cos\varphi$, $x^n + x^{-n} = 2\cos(n\varphi)$. Wir haben also $2\cos(n\varphi)$ durch $2\cos\varphi$ auszudrücken, um die Entwicklung von $x^n + x^{-n}$ nach Potenzen von y zu erhalten.

Besonderes Interesse verdienen die binomischen Gleichungen:

(2) $$x^n = A,$$

wo n eine ganze positive, A eine beliebige Zahl ist. Wir setzen A in die Normalform der komplexen Größen, § 16, (7),

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und bestimmen dann $0 < \varphi < 360^0$, r positiv,

(3) $$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)y.$$

Es folgt durch Einsetzung in (2)

$$y^n = 1.$$

Wir sehen also, daß wir statt (2) die einfachere Gleichung behandeln dürfen:

(4) $$x^n = 1.$$

Nehmen wir an, sie werde durch irgend eine komplexe Zahl befriedigt. Diese Annahme schließt eine reelle Lösung als besonderen Fall ein, ist also ganz allgemein. Dann dürfen wir setzen:

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \text{ positiv}.$$

Man findet

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = 1,$$

also nach dem Hauptsatze über die komplexen Größen (§ 16, S. 46):

(5) $$r^n\cos(n\varphi) = 1, \quad r^n\sin(n\varphi) = 0.$$

Quadriert man und addiert, so folgt wegen $\cos^2(n\varphi) + \sin^2(n\varphi) = 1$

$$r^{2n} = 1.$$

Weil r positiv sein soll, hat diese Gleichung nur **eine** Lösung, nämlich $r = 1$. Also ist

(6) $$x = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Aus (5) ergibt sich nun, weil diese Gleichung nur für $n\varphi = 0$ oder $n\varphi =$ einem ganzzahligen Vielfachen von 360^0 richtig ist,

$$\varphi = 0, \quad \frac{360}{n}, \quad 2\cdot\frac{360}{n}, \quad 3\cdot\frac{360}{n}, \text{ usw.}$$

Die Lösung ist also endlich

(7) $$x_m = \cos\left(m\cdot\frac{360}{n}\right) + i\sin\left(m\cdot\frac{360}{n}\right),$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Nähmen wir $m = n$, so würden wir auf x_0 zurückkommen. Die Gleichung (4) hat **nicht mehr** als n Wurzeln.

Dieselbe Entwicklung haben wir schon oben § 16, S. 52 im Anschluß an die geometrische Darstellung der komplexen Größen vorgetragen. Wir haben dort den Vollwinkel durch 2π bezeichnet, hier durch 360^0. Beide Darstellungen sind im Wesen gleich und führen auf die Aufgabe, den Winkel von 360^0 oder den ganzen Kreis in n gleiche Teile zu teilen. Ebenso ist die Aufgabe der Gleichung (2) gleichbedeutend mit der geometrischen Aufgabe, **einen beliebigen**

gegebenen Winkel in n gleiche Teile zu teilen. Mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln können wir beide Aufgaben leicht lösen, wie die Gleichungen (3) und (7) zu erkennen geben. Als Beispiel wählen wir die Gleichung $x^{15} = 1$. Man findet:

$$x_0 = 1,$$

$$\begin{array}{ll}
x_1 = \cos 24^0 + i \sin 24^0, & x_8 = -\cos 12^0 - i \sin 12^0, \\
x_2 = \cos 48^0 + i \sin 48^0, & x_9 = -\cos 36^0 - i \sin 36^0, \\
x_3 = \cos 72^0 + i \sin 72^0, & x_{10} = -\cos 60^0 - i \sin 60^0, \\
x_4 = -\cos 84^0 + i \sin 84^0, & x_{11} = -\cos 84^0 - i \sin 84^0, \\
x_5 = -\cos 60^0 + i \sin 60^0, & x_{12} = +\cos 72^0 - i \sin 72^0, \\
x_6 = -\cos 36^0 + i \sin 36^0, & x_{13} = \cos 48^0 - i \sin 48^0, \\
x_7 = -\cos 12^0 + i \sin 12^0, & x_{14} = \cos 24^0 - i \sin 24^0.
\end{array}$$

Der Moivresche Satz zeigt sofort, daß alle Wurzeln ganzzahlige Potenzen von x_1 sind. Statt x_1 hätte man auch eine andere Wurzel nehmen können; doch nicht diejenigen, für welche in Gl. (7) die Zahlen m und n gemeinsame Teiler haben. Jede der andern, also

$$x_1, \quad x_2, \quad x_4, \quad x_7, \quad x_8, \quad x_{11}, \quad x_{13}, \quad x_{14},$$

bringt, wenn man sie in die Potenzen 1, 2, 3, ..., 15 erhebt, die sämtlichen Wurzeln hervor. Die Indizes m sind die zu 15 relativen Primzahlen < 15; und die gezogenen Schlüsse gelten allgemein für jedes n.

Versuchen wir nunmehr die Lösung der Gleichung $x^n = 1$ auf algebraischem Wege. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gleichung

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{8}$$

Wir multiplizieren beiderseits mit x und subtrahieren. Dann wird nach Wegfall der Zwischenglieder $S(x-1) = x^n - 1$ oder

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1). \tag{9}$$

Beginnen wir nun die Lösung mit den einfachsten Beispielen:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1), \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1,$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1), \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^0 = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1); \quad x_0 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i.$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Die Lösung der reziproken Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ gelingt mit Hülfe der quadratischen:

$$y^2 + y - 1 = 0, \quad x^2 - xy + 1 = 0,$$

also

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 72^0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \sin 72^0 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Die übrigen Wurzeln x erhält man, indem man $\sqrt{5}$ und i andere Vorzeichen in allen möglichen Verbindungen erteilt. Es ist nützlich, die einzelnen Werte für x durch Potenzerhebung ineinander übergehen zu lassen. Die Gleichung

(10) $$x^6 = 1$$

führt auf

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

und dann auf

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Als primitive Wurzeln erhält man nur

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

wenn man solche Wurzeln primitiv nennt, deren Potenzen alle Wurzeln darstellen.

(11) $$x^7 - 1 = 0$$

führt auf die reziproke Gleichung

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Setzen wir

$$y = x + \frac{1}{x},$$

so stoßen wir auf die Gleichung dritten Grades

(12) $$y^3 + y^2 - 3y - 1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$y_1 = 2\cos\frac{360}{7}, \quad y_2 = 2\cos\frac{720}{7}, \quad y_3 = 2\cos\frac{1080}{7}.$$

Auf eine quadratische Gleichungskette ist (12) nicht zurückführbar und deshalb die Zeichnung des regelmäßigen Siebenecks mit Zirkel und Lineal unmöglich.

Man kann auch folgenden Ansatz machen:

$$y = x + x^2 + x^4,$$
$$z = x^3 + x^6 + x^5.$$

y kehrt in sich selbst zurück, wenn man x durch x^2 oder x^4 ersetzt, es geht in z über, wenn x durch x^3, x^5, x^6 ersetzt wird. Nun ist

$$z + y = -1, \quad zy = +2,$$

wie die Ausführung der Multiplikation zeigt. Also ist

$$(z - y)^2 = -7, \quad \text{also} \quad 2y = -1 \pm i\sqrt{7}.$$

x erscheint als Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$(\alpha - x)(\alpha - x^2)(\alpha - x^4) = 0,$$

oder nach Entwicklung:

(13) $$\alpha^3 - y\alpha^2 + z\alpha - 1 = 0.$$

Auch diese Gleichung ist auf quadratische nicht zurückführbar. Sei

(14) $$x^8 = 1.$$

Wir zerlegen in $(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$ und haben nur noch $x^4 + 1 = 0$ zu studieren. Setzen wir $y = x + x^{-1}$, so folgt $y^2 - 2 = 0$, also

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \cos 45^0 + i \sin 45^0.$$

Sei

(15) $$x^9 = 1.$$

Indem wir $(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) = 0$ durch Zerlegung erhalten und $y = x + x^{-1}$ setzen, finden wir

(16) $$y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist durch eine Kette quadratischer nicht lösbar und daher die Zeichnung des regelmäßigen Neunecks mit Zirkel und Lineal unmöglich. Die auftretenden Winkel sind 40^0, 80^0, 20^0.

Die Wurzeln von (16) sind nämlich:

$$2 \cos 40^0, \quad 2 \cos 80^0, \quad -2 \cos 20^0.$$

Aus (16) ergibt sich

(17) $$\cos 40^0 + \cos 80^0 = \cos 20^0,$$
$$8 \cos 20^0 \cdot \cos 40^0 \cdot \cos 80^0 = 1.$$

Wir haben hier also Lösungen der merkwürdigen Gleichungen erhalten:

$$\cos \alpha = \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha),$$
$$8 \cos \alpha \cdot \cos(2\alpha) \cos(4\alpha) = 1.$$

Die primitiven Wurzeln der Gleichung (15) sind x, x^2, x^4, x^5, x^7, x^8. Auch diese kann man wieder zusammenstellen wie folgt:

$$y = x + x^4 + x^7, \quad z = x^2 + x^8 + x^5.$$

Es ist $y + z = 0$, $yz = 0$, also $y = 0$, $z = 0$. Dies folgt in Verbindung mit $1 + x + x^2 + \cdots + x^8 = 0$ sofort aus $x^6 + x^3 + 1 = 0$

Nach **Moivre** erhält man also auch

(18) $$\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ,$$

oder

$$\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = \cos 10^\circ.$$

Wir wenden uns zur Gleichung $x^{10} = 1$ und werden durch die Zerlegung $(x^5 - 1)(x^5 + 1) = 0$ auf die Gleichung $x^5 + 1 = 0$ geführt. Hieraus folgt $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$, also

(19) $$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung hat keine Schwierigkeit.

Die Gleichung $x^{11} = 1$ führt auf eine Gleichung 5ten Grades. Sie besitzt keine den elementaren Methoden zugänglichen Eigenschaften:

(20) $$x^{12} = 1, \quad (x^6 - 1)(x^6 + 1) = 0.$$

Also ist $x^6 + 1 = 0$ besonders zu behandeln. Man erhält die Zerlegung

$$(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0.$$

Setzen wir $x + x^{-1} = y$, so finden wir, daß ist:

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).$$

Dies bestätigt man auch leicht durch Ausrechnung. Die Lösung

(21) $$x = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

ist eine primitive für die Gleichung $x^{12} = 1$. Erhebt man sie in die 1, 2, 3, 4, ..., 12te Potenz, so kommen alle Wurzeln heraus. Dasselbe gilt von x^5, x^7, x^{11}. Die übrigen Wurzeln sind imprimitiv und genügen auch einer oder mehreren der Gleichungen $x^2 = 1$, $x^3 = 1$, $x^4 = 1$, $x^6 = 1$. Es ist

$$x^5 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad x^7 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \quad x^{11} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}.$$

Wir wenden uns jetzt zur Gleichung $x^{13} = 1$. Hier stoßen wir auf die Gleichung

$$x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Wir bringen diese Gleichung zunächst in eine andere Ordnung, indem wir der Reihe nach x, x^2, x^4 usw. entstehen lassen und beachten, daß $x^{16} = x^{13} \cdot x^3 = x^3$ ist, ebenso $x^{32} = x^{26} \cdot x^6 = x^6$ usw. Dann wird

(22) $$1 + x + x^2 + x^4 + x^8 + x^3 + x^6 + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^5 + x^{10} + x^7 = 0.$$

Indem wir nun die geraden und ungeraden Stellen unterscheiden, setzen wir

$$y = x + x^4 + x^3 + x^{12} + x^9 + x^{10},$$

$$z = x^2 + x^8 + x^6 + x^{11} + x^5 + x^7.$$

Nun ist $y + z = -1$ nach (22). Bilden wir yz, so verfahren wir zweckmäßig, wenn wir zuerst das Produkt der jedesmal untereinander stehenden Potenzen bilden, also

$$x^{2+1} + x^{8+4} + x^{6+3} + x^{11+12} + x^{9+5} + x^{10+7} = y.$$

Dann multiplizieren wir jede Potenz mit der schräg aufwärts benachbarten. Dies gibt

$$x^{2+4} + x^{8+3} + x^{6+12} + x^{11+9} + x^{5+10} + x^{7+1} = z.$$

Ebenso fahren wir reihenweise fort, indem wir die obere Reihe über x^{10} mit x, x^4, x^3 usw. fortgesetzt denken. Dann wird

$$yz = y + z + z + y + z + y = -3.$$

Folglich ist $(y - z)^2 = 13$,

$$y = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad z = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Die Zuordnung der Vorzeichen ist für uns gleichgültig. In welcher Weise sie getroffen werden muß, wenn $x = \cos\frac{360}{13} + i\sin\frac{360}{13}$ festgesetzt wird, ist eine Aufgabe der Zahlentheorie.

Wir setzen nun weiter

$$u = x + x^3 + x^9, \quad w = x^2 + x^6 + x^5,$$
$$v = x^4 + x^{12} + x^{10}, \quad t = x^8 + x^{11} + x^7.$$

Dann ist $u + v = y$ und es wird nach reihenweiser Multiplikation

$$uv = w + t + 3 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2},$$

$$u + v = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad (u - v)^2 = \frac{-26 + 6\sqrt{13}}{4},$$

$$u = \frac{-1 + \sqrt{13} + i\sqrt{26 - 6\sqrt{13}}}{4}.$$

Durch richtige Abänderung der Vorzeichen erhält man u, v, w, t. Um x zu bestimmen, stößt man wieder auf eine Gleichung dritten Grades, nämlich

$$(\alpha - x)(\alpha - x^3)(\alpha - x^9) = 0,$$

d. h.

$$\alpha^3 - u\alpha^2 + v\alpha - 1 = 0.$$

Auch das regelmäßige Dreizehneck ist mit Zirkel und Lineal nicht herstellbar.

Für das Vierzehneck stoßen wir auf $x^7 + 1 = 0$. Diese Gleichung ist durch $x^7 = 1$ erledigt, wenn man für jede Wurzel das Vorzeichen ändert.

(23) $$x^{15} = 1.$$

Wir zerlegen

$$x^{15} - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1),$$
$$x^{15} - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1).$$

Die primitiven Wurzeln sind

$$x, \quad x^2, \quad x^4, \quad x^7, \quad x^8, \quad x^{11}, \quad x^{13}, \quad x^{14}.$$

Ordnen wir dieselben mit den übrigen x^3, x^6, x^9, x^{12}, x^5, x^{10} in eine Summe, so haben wir die dritte Zerlegung

$$x^{15} - 1 = (x - 1)(x^{14} + x^{13} + \cdots + x + 1).$$

Nun ist für jede primitive Wurzel, wie aus den beiden ersten Zerlegungen hervorgeht,

$$x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0, \quad x^{10} + x^5 + 1 = 0.$$

Folglich erhalten wir aus der letzten Zerlegung

$$x + x^2 + x^4 + x^7 + x^8 + x^{11} + x^{13} + x^{14} = 1.$$

Nun setzen wir

$$\left.\begin{aligned} y &= x + x^2 + x^4 + x^8 \\ z &= x^7 + x^{14} + x^{13} + x^{11} \end{aligned}\right\}, \quad y + z = +1.$$

Daher nach Ausführung der Multiplikation und unter Beachtung, daß $x^{16} = x$, $x^{17} = x^2$ ist usw.

$$yz = y + (x^9 + x^3 + x^6 + x^{12}) + z + (1 + 1 + 1 + 1),$$
$$yz = 4.$$

Folglich

$$(y - z)^2 = -15.$$

y und z können wir nunmehr als bekannt ansehen. Wir setzen nun weiter:

$$\alpha = x + x^4, \quad \beta = x^7 + x^{13},$$
$$\gamma = x^2 + x^8, \quad \delta = x^{14} + x^{11}.$$

Dann ist

$$\alpha + \gamma = y \quad \text{und} \quad \alpha\gamma = x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} = -1,$$
$$\beta + \delta = z, \quad \beta\delta = -1.$$

Nunmehr sind α, β, γ, δ bekannt. x gewinnt man dann aus der Gleichung

$$x(1 + x^3) = \alpha,$$

worin x^3 als Wurzel der Gleichung $x^5 = 1$ bestimmbar ist.

$$y = \frac{1 + i\sqrt{15}}{2}, \quad z = \frac{1 - i\sqrt{15}}{2}.$$

In der Tat ist

$$\cos 24^0 + \cos 48^0 - \cos 84^0 - \cos 12^0 = \tfrac{1}{2},$$
$$\sin 24^0 + \sin 48^0 + \sin 84^0 - \sin 12^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{15}.$$

Ebenso wird

$$\alpha - \gamma = \frac{\sqrt{2 + 2i\sqrt{15}}}{2} = \frac{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5} + i(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{4}, \quad \gamma = \frac{1 - \sqrt{5} + i(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4},$$

$$\cos 24^0 - \cos 84^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \qquad \sin 24^0 + \sin 84^0 = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4},$$

$$\cos 12^0 - \cos 48^0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \sin 48^0 - \sin 12^0 = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4}.$$

Man hätte auch noch andere Ketten von quadratischen Gleichungen aufstellen können. Aus

$$y = x + x^{14} + x^4 + x^{11},$$
$$z = x^2 + x^{13} + x^8 + x^7,$$

folgt

$$y + z = 1, \quad yz = 1 + 2(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12}),$$

$$y + z = 1, \quad yz = -1, \quad y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$2\cos 24^0 - 2\cos 84^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dann setzt man zur Bestimmung von x

$$\alpha = x + x^{14}, \quad \beta = x^4 + x^{11}.$$

Schreiten wir zur folgenden Aufgabe:

$$x^{16} = 1, \quad (x^8 + 1)(x^8 - 1) = 0.$$

Es ist nun zu untersuchen:

(24) $$x^8 = -1.$$

Man findet

$$x^4 = i, \quad x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Nun setzen wir $x = y + zi$ und finden:

$$y^2 - z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 2yz = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y^2 + z^2 = 1.$$

Daher

$$x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Den Schluß unserer Untersuchungen auf dem Gebiete der binomischen Gleichungen bilde die berühmte Gaußsche Entdeckung. Sei

$$x^{17} = 1. \tag{25}$$

Wir setzen

$$\begin{cases} y = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + x^{15} + x^{13} + x^9, \\ z = x^3 + x^6 + x^{12} + x^7 + x^{14} + x^{11} + x^5 + x^{10}. \end{cases} \tag{26}$$

Ersetzen wir in y die Größe x durch $x^2, x^4, x^8, \ldots, x^9$, so kehrt y in sich selbst zurück; ersetzt man x durch $x^3, x^6, \ldots, x^{10}$, so geht es in z über und ebenso z. Daher muß yz und $y + z$ jedes unverändert bleiben für irgend eine Vertauschung der Wurzeln $x, x^2, x^3, \ldots, x^{16}$. Zunächst ist $y + z = -1$. Das Produkt yz entwickeln wir durch reihenweise Multiplikation und finden:

$$yz = y + z + z + z + y + y + y + z = -4.$$

Also $(y - z)^2 = 17$. Folglich

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad z = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Über die Zuordnung zu $x = \cos\frac{360}{17} + i\sin\frac{360}{17}$ brauchen wir keine Entscheidung zu treffen, wenn wir nicht eine bestimmte, sondern irgend eine Lösung der Gleichung (25) außer $x = 1$ suchen. Nun setzen wir weiter:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x + x^4 + x^{16} + x^{13} \\ \beta &= x^2 + x^8 + x^{15} + x^9 \end{aligned}\right\}, \quad \alpha + \beta = y.$$

Dann ist $\alpha\beta = z + y = -1$. Folglich

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}.$$

Setzen wir anderseits

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= x^3 + x^{12} + x^{14} + x^5 \\ \delta &= x^6 + x^7 + x^{11} + x^{10} \end{aligned}\right\}, \quad \gamma + \delta = z,$$

so wird

$$\gamma\delta = \beta + \alpha + \gamma + \delta = -1.$$

Für γ und δ erhält man ähnlich gebaute Ausdrücke wie für α und β. Man findet weiter

$$\alpha\gamma = 2\alpha + \beta + \delta, \quad \alpha\delta = \beta + \gamma + 2\delta.$$

Hieraus folgt durch Addition

$$\alpha z = -2 + \delta - \gamma.$$

Man kann also δ und γ eindeutig aus α erhalten. Ist also die Zuordnung der Vorzeichen für y willkürlich getroffen, so ist z eindeutig

bestimmt. Ist nun wieder α festgesetzt, so ist auch β, γ, δ ohne Zweideutigkeit bestimmt.

Bei der von uns getroffenen Zuordnung finden wir nach leichter Rechnung

$$-\gamma+\delta=\frac{+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4},$$

$$\gamma+\delta=\frac{-2-2\sqrt{17}}{4}$$

$$\gamma=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4},\quad \delta=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}.$$

Endlich setzen wir

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon=x+x^{16}\\ \zeta=x^4+x^{13}\end{array}\right\},\quad \varepsilon+\zeta=\alpha.$$

Dann wird $\varepsilon\zeta=\gamma$. Also $(\varepsilon-\zeta)^2=\alpha^2-4\gamma$; ist ε willkürlich als eine der beiden sich ergebenden Werte bestimmt, so ist ζ unzweideutig gefunden. Dasselbe gilt nun von allen ähnlich gebauten Ausdrücken. Sei

$$u_1=x+x^{16},\quad u_2=x^2+x^{15},\quad u_3=x^3+x^{14},\quad u_4=x^4+x^{13},$$
$$u_5=x^5+x^{12},\quad u_6=x^6+x^{11},\quad u_7=x^7+x^{10},\quad u_8=x^8+x^9.$$

Dann wird etwa: $u_1=2\cos\frac{m\cdot 360}{17}$.

Hieraus lassen sich u_2, u_3, ... rational ableiten. Also ist jedes u bestimmt, wenn wir eins derselben, etwa u_1 berechnet und die verbleibende Zeichenzweideutigkeit durch willkürliche Festsetzung erledigt haben.

Außer in den von uns betrachteten Hauptbeispielen ist es auch noch in andern Fällen möglich, Gleichungen höheren Grades auf eine Kette quadratischer Gleichungen zurückzuführen. Indes ist es der höheren Mathematik vorzubehalten, derartige Gleichungen einigermaßen erschöpfend zu behandeln.

§ 22. Arithmetische Reihen. Geometrische Reihen.

Reihe ist eine Folge gesetzmäßig gebildeter Summanden.

(1) $$s=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Besteht das Gesetz darin, daß $a_n=d+a_{n-1}$ ist, so haben wir eine arithmetische Reihe erster Ordnung. Ist $a_n=qa_{n-1}$, so haben wir eine geometrische Reihe erster Ordnung. Der erstern können wir daher die Form geben:

$$s=\overset{1}{\underbrace{a}}+(\overset{2}{\underbrace{a+d}})+(\overset{3}{\underbrace{a+2d}})+(\overset{4}{\underbrace{a+3d}})+\cdots+\overset{n}{\underbrace{a+(n-1)d}}.$$

Das letzte Glied hat daher die Form

(2) $$t = a + (n - 1)d.$$

Zur Bestimmung der Summe dient das allbekannte Verfahren, die Summe auch in umgekehrter Reihenfolge der Glieder aufzuschreiben und dann gliedweise zu addieren. Also:

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + t,$$
$$s = t + (t - d) + (t - 2d) + \cdots + a;$$

(3) $$2s = n(a + t).$$

Zwischen den 5 Größen a, n, d, s, t bestehen 2 Gleichungen. Man kann also 10 Aufgaben aus ihnen bilden, je nachdem a, d; a, n; a, s; a, t; d, n; d, s; d, t; n, s; n, t; s, t gesucht sind. Durch Elimination von t folgt $2s = 2na + n(n - 1)d$. Sind a, d, s gegeben, so entsteht für n eine quadratische Gleichung. Ist die Lösung negativ oder irrational oder auch ein positiver rationaler Bruch, so genügen die gefundenen Werte den Gleichungen, aber nicht der Aufgabe. Indem ich bezüglich einiger Schulaufgaben auf meine Sammlung verweise, soll hier nur die Aufgabe behandelt werden, den Wert der Summe anzugeben:

$$s = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

Man findet $s = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$, also für $n = \infty$ ist $s = \frac{1}{2}$.

Die arithmetische Reihe erster Ordnung kann auch geschrieben werden:

$$s = \sum_1^n {}_m a + b \cdot m).$$

Dann wird das n^{te} Glied $a + bn$ und jedes geht aus dem vorhergehenden durch Addition der Zahl b hervor. Hierin liegt die Möglichkeit einer Erweiterung. Eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung werden wir nennen:

$$s = \sum(a + bx + cx^2), \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Eine arithmetische Reihe h^{ter} Ordnung würde sein:

(4) $$s = \sum(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_h x^h),$$
$$x = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Die Summation ist sofort ausführbar, wenn es gelingt, die Summen $\sum x^2, \sum x^3, \ldots, \sum x^h$ für $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ zu bestimmen. Diese berühmte Aufgabe kann man durch elementare Methoden mancherlei Art lösen. Wir beginnen mit dem Beispiele

(5) $$s = \sum x^2.$$

Es ist

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Nimmt man beiderseits die Summe für $x = 1, 2, \ldots, n$, so ist

$$\sum(x+1)^3 - \sum x^3 = (n+1)^3 - 1,$$

also nach Ausführung von $\sum x = \frac{1}{2}n(n+1)$:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum x^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n,$$

oder

$$3\sum x^2 = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

(6) $$\sum x^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = s_2.$$

Ebenso findet man

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Da nun $\sum(x+1)^4 - \sum x^4 = (n+1)^4 - 1$ ist, so folgt

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4\sum x^3 + 6\sum x^2 + 4\sum x + n,$$

also nach geschehener Ausrechnung:

$$4\sum x^3 = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2$$

(7) $$\sum x^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Eine zweite sehr einfache Methode ergibt sich, wenn man willkürlich ansetzt:

$$\sum x^m = \alpha n^{m+1} + \beta n^m + \gamma n^{m-1} + \cdots$$

Dann erhält man zur Bestimmung der α, β, γ usw. Gleichungen in beliebiger Menge. Streng wird das Ergebnis erst durch nachträglichen Beweis etwa nach der Methode der vollständigen Induktion. Folgende Ableitung setzt den binomischen Lehrsatz voraus. Es sei

(8) $$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \alpha n^{m+1} + \beta n^m + \gamma n^{m-1} + \delta n^{m-2} + \cdots$$

Dann ist auch:

(9) $$1^m + 2^m + 3^m + \cdots (n-1)^m = \alpha(n-1)^{m+1} + \beta(n-1)^m + \gamma(n-1)^{m-1} + \delta(n-1)^{m-2} + \cdots$$

Subtrahiert man, so folgt:

$$n^m = \alpha\{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}\} + \beta\{n^m - (n-1)^m\} + \gamma\{n^{m-1} - (n-1)^{m-1}\} + \cdots$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von n^m, n^{m-1}, n^{m-2}, n^{m-3} ergibt sich leicht

$$(m+1)\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{m}{12}, \quad \delta = 0.$$

Nun kann man aber auch gemäß (8) ansetzen:

$$(10) \quad 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n+1)^m = \alpha(n+1)^{m+1} + \beta(n+1)^m + \gamma(n+1)^{m-1} + \cdots$$

Substrahiert man von (10) die Gleichung (9), so folgt

$$(n+1)^m + n^m = \alpha\{(n+1)^{m+1} - (n-1)^{m+1}\} + \beta\{(n+1)^m - (n-1)^m\} + \gamma\{(n+1)^{m-1} - (n-1)^{m-1}\} + \cdots$$

Statt der linken Seite kann man schreiben:

$$n^m + \left\{\frac{1}{2}(n+1)^m + \frac{1}{2}(n-1)^m\right\} + \left\{\frac{1}{2}(n+1)^m - \frac{1}{2}(n-1)^m\right\}.$$

Die erste Klammer enthält die Potenzen n^m, n^{m-2}, n^{m-4}, ..., die zweite n^{m-1}, n^{m-3}, n^{m-5}, ... Rechts enthält die erste Klammer nur Potenzen n^m, n^{m-2}, n^{m-4} usw., desgl. die 3te, 5te usw. Die 2te, 4te, 6te usw. nur Potenzen n^{m-1}, n^{m-3} usw. Betrachten wir nun diese letzteren für sich. Da $\beta = \frac{1}{2}$, so hebt sich die mit β behaftete Klammergröße gegen den links stehenden gleichen Ausdruck fort und wir haben:

$$0 = \delta\{(n+1)^{m-2} - (n-1)^{m-2}\} + \zeta\{(n+1)^{m-4} - (n-1)^{m-4}\} + \cdots$$

Wenn wir nun nach Potenzen von n ordnen, so ergibt sich, daß alle Koeffizienten δ, ζ, ... null sind. Die Potenzen n^{m-2}, n^{m-4}, n^{m-6} kommen also in (8) nicht vor.

Zur Ermittlung der übrigen Koeffizienten haben wir den Ansatz:

$$n^m + \frac{1}{2}\{(n+1)^m + (n-1)^m\} = \alpha\{(n+1)^{m+1} - (n-1)^{m+1}\} + \gamma\{(n+1)^{m-1} - (n-1)^{m-1}\} + \varepsilon\{(n+1)^{m-3} - (n-1)^{m-3}\} + \cdots$$

Man findet:

$$\varepsilon = -\frac{1}{30} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Die weitere Entwicklung führt auf die Bernouillischen Zahlen, von denen die ersten heißen:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}.$$

Die von uns gewonnene Summenformel lautet wie folgt:

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{1}{m+1} \cdot n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + B_1 \cdot \frac{m}{2} \cdot n^{m-1} - B_2 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} n^{m-3} + B_3 \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} n^{m-5} - \cdots$$

Setzt man kurz

$$s_m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m,$$

so wird:

$$s_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \quad s_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$s_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2, \quad s_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$

$$s_5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2,$$

$$s_6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n,$$

$$s_7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2,$$

$$s_8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n,$$

$$s_9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2,$$

$$s_{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n.$$

Für $n = 1$ liefern alle Werte s_m das Ergebnis 1. Die Entwicklungen schließen mit n oder n^2 ohne Freiglied.

Interessante Aufgaben, welche mit Hülfe der vorstehenden Entwicklungen gelöst werden können, ergeben sich leicht. So kann man die Bestimmung der Summen

$$\sum_1^n{}_x(4x+1)^3, \quad \sum_n^{2n}{}_x(4x+1)^3, \quad \sum_m^p{}_x(hx+k)^2$$

leicht ausführen. Andere ergeben sich aus den figurierten Zahlen, obwohl diese Fragen mit Recht als ziemlich müßig gelten. Aus der Reihe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...

entsteht durch Addition der Anfangsglieder:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 ...

Das ist die Reihe der Dreieckszahlen $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

Ebenso entsteht aus

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

Das ist die Reihe der Viereckszahlen. Aus

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

entsteht

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, $\ldots = \frac{n(3n-1)}{2}$,

die Reihe der Fünfeckszahlen usw.

Behandelt man die Reihen in derselben Weise weiter, so gelangt man zu den Reihen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...
1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ... (Pyramidalzahlen) (3eckige Pyramide)

oder

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...
1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ... (4eckige Pyramide)

oder

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ...
1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, ... (5eckige Pyramide).

Die Darstellung der Pyramidalzahlen durch Kugelhaufen mag erwähnt sein.

Geometrische Reihen heißen solche, bei denen jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einer bestimmten festen Zahl hervorgeht.

(11) $$s = \underbrace{a}_{1} + \underbrace{aq}_{2} + \underbrace{aq^2}_{3} + \cdots + \underbrace{aq^{n-1}}_{n}, \quad t = aq^{n-1}.$$

Die Bestimmung der Summe geschieht durch Multiplikation mit q und folgende Subtraktion, woraus man erhält

(12) $$s = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Die Vergleichung von (11) und (12) ergibt eine Identität (Selbstgleichung), welche wir bei Ersetzung des Buchstabens q durch x (vgl. § 21, S. 76) schreiben wie folgt:

(13) $$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1.$$

Ersetzen wir x durch $\frac{a}{b}$, so erhält man nach leichter Umformung

(14) $$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}.$$

Zwischen den Größen a, n, q, s, t bestehen zwei Gleichungen. Folglich erhält man wieder 10 Grundaufgaben für die geometrische Reihe; aber sie sind teilweise elementarer Behandlung unzugänglich. So wird, wenn s, a, n gegeben ist, die trinomische Gleichung n^{ten} Grades zu lösen sein:

$$aq^n - sq + s - a = 0.$$

Die Lösung ist noch dadurch erschwert, daß eine im allgemeinen unbrauchbare Wurzel $q = 1$ vorhanden ist.

Die elementare Behandlung kann sich auf nachstehende Erörterungen beschränken. Aus (13) folgt:

$$\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

Nun ist x^n für $x < 1$ beliebig klein, also für

$$-1 < x < 1$$

gilt die Gleichung

(15) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Hier haben wir das erste Beispiel einer **unendlichen Reihe**. Sie ist zugleich für jedes x, dessen a. B. < 1 ist, **unbedingt konvergent**.

Konvergent heißt eine Reihe, wenn die Summe der Glieder, welche auf das n^{te} folgen, mit wachsendem n beliebig klein wird.

Unbedingt konvergent heißt eine Reihe, wenn die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder konvergent ist. Beides trifft bei der Reihe (15) in den angegebenen Grenzen zu. Denn die Differenz

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = \frac{x^n}{1-x}$$

ist beliebig klein bei wachsendem n.

Lehrsatz. Wenn für eine Reihe **positiver** endlicher Größen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von einem gewissen Gliede a_n an der Quotient

$$a_{n+1} : a_n < \delta < 1$$

ist, so ist die Reihe **konvergent**:

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Beweis. Es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \delta, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \delta, \quad \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < \delta, \quad \cdots$$

Also:

$$a_{n+1} < \delta a_n, \quad a_{n+2} < a_n \delta^2, \quad a_{n+3} < a_n \delta^3, \quad \ldots$$

Folglich ist

$$s < a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n(1 + \delta + \delta^2 + \cdots).$$

Also liegt die Summe s unterhalb einer endlichen Grenze. Zugleich wird $a_{n+q} < a_n \delta^q$, also beliebig klein und dasselbe gilt von der Summe aller auf das $n + q^{te}$ folgenden Glieder. Konvergent sind z. B. die Reihen:

1. $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$, weil $\frac{n+1}{n} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x < 1$, wenn $x < 1$.

2. $1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$

weil bei festem n und beliebig großem h

$$\frac{n-h+1}{h} x < 1, \quad \text{wenn } x < 1.$$

3. $x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots,$ weil $\frac{n}{n+1} x < 1,$ wenn $x < 1$

4. $1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots$

Hier bedeutet

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n,$$

gesprochen: n-Fakultät. Diese Reihe ist für jedes x konvergent.

Setzen wir in

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

für x den Wert $x = \cos\varphi + i \sin\varphi$, so wird

$$\frac{1 - \cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi)}{1 - \cos\varphi - i \sin\varphi} = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots + \cos(n-1)\varphi$$
$$+ i \sin\varphi + i \sin 2\varphi + i \sin 3\varphi \cdots + i \sin(n-1)\varphi.$$

Links erweitern wir mit $1 - \cos\varphi + i \sin\varphi$ und erhalten:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n\varphi - \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \sin\frac{\varphi}{2}} = \cos\varphi + \cos(2\varphi) + \cos(3\varphi) + \cdots + \cos(n-1)\varphi;$$

$$\frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n\varphi - \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \sin\frac{\varphi}{2}} = \sin\varphi + \sin(2\varphi) + \sin(3\varphi) + \cdots + \sin(n-1)\varphi.$$

Die wichtigste Anwendung der geometrischen Reihe für die Schule und das Verkehrsleben ist die Zinseszinsrechnung. Ein Kapital a erreicht zu z Prozent verliehen mit den Zinsen am Ende des ersten Jahres den Wert $a\left(1 + \frac{z}{100}\right)$. Der von a unabhängige Klammerausdruck erhält den Namen Zinsfaktor und die Bezeichnung p, also

(16) $$p = 1 + \frac{z}{100}.$$

Nach n Jahren erhält das Kapital den Wert

(17) $$s = ap^n.$$

In dieser Weise wachsen Sparkassenguthaben tatsächlich an, weil bei Nichtabhebung der Zinsen diese dem Kapital zugeschrieben und weiter

mit verzinst werden. Auf die Vermehrung eines Waldbestandes und auf die Bevölkerungszunahme ist das Gesetz (17) nicht streng anwendbar. Werden am Ende jedes Jahres nicht nur die fälligen Zinsen, sondern darüber hinaus Tilgungsgelder bezahlt, so kann gefragt werden, wie hoch die jährlich gleiche Summe sich stellt, wenn der Zweck in n Jahren (mit dem Schlusse des n^{ten} Jahres) erreicht werden soll. Die gewöhnliche Methode der Herleitung ist folgende. Der Ausgleich ist für den Schluß des n^{ten} Jahres zu berechnen. In gewissem Sinne bilden die Zinsen den Marktpreis des Geldes und heutige a *M* werden daher nach n Jahren den Wert haben, der ihnen bei Zinseszinsbehandlung zukommt. Daher hat der Verleiher alsdann einen Anspruch auf ap^n *M*. Der Entleiher schafft durch jährliche Zahlung von b *M* einen Gegenwert, nämlich

$$bp^{n-1} + bp^{n-2} + \cdots + bp + b = b\frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Daher ist der Ausgleich ein gerechter, d. h. ein nach dem Geldpreis, über den man sich geeinigt hat, geregelter, wenn ist

$$ap^n = b\frac{p^n - 1}{p - 1}. \tag{18}$$

Die hieraus entspringenden Schulaufgaben sind alle einfach bis auf diejenige, welche nach dem Werte von p fragt.

Zur Ableitung der Formel (18) können wir auch gelangen wie folgt. Am Ende des ersten Jahres zahlen wir die Zinsen mit $\frac{az}{100}$ *M* und tilgen $b - \frac{az}{100}$. Dann bleibt das Kapital $a + \frac{az}{100} - b = ap - b$. Die Zinsen dieses Kapitals sind $(ap - b)\frac{z}{100}$, also bleibt zur Tilgung verfügbar $b - (ap - b)\frac{z}{100}$, oder $bp - a\frac{pz}{100}$. Also sinkt das Kapital auf $ap - b - bp + a\frac{pz}{100}$ oder $ap^2 - b - bp$ usw.

Wird das Kapital durch Zeichnung von Wertpapieren (Aktien) aufgebracht, so führt vorstehende Aufgabe zu der Aufstellung eines Tilgungsplans. Wenn der Anteilschein auf eine runde Summe lautet, etwa 500 oder 1000 *M*, so kann neben der Zinszahlung die Abtragung nur durch ganze Vielfache von 500 oder 1000 geschehen. Ermittelt man also aus Formel (18) den Wert b, so muß man die Abtragung der Schuld so einrichten, daß die jedesmaligen Zinsen und die Rückzahlung zusammen dem Werte b möglichst nahe kommen. Dabei ist eine gewisse Willkür nicht zu vermeiden. Beispiele habe ich in meiner Sammlung gegeben.

Noch verwickelter wird die Lösung, wenn neben der Rückzahlung auch noch ein verhältnismäßiges Aufgeld (prozentuales Agio)

gezahlt wird. Die Lösung kann man vorbereiten wie folgt. Es möge $z\,\%$ gerechnet und $u\,\%$ Aufgeld bei der Rückzahlung gewährt werden. Sei $100p = 100 + u$, $100q = 100 + z + u$. Also $z = 100(q - p)$. Das Anfangskapital sei a, die jährliche Durchschnittszahlung sei b. Die ersten Jahreszinsen sind $\frac{az}{100}$, also bleiben $b - \frac{az}{100}$ für Rückzahlung und Aufgeld verwendbar. Davon entfällt auf erstere $\left(b - \frac{az}{100}\right) : p$, auf letzteres $\left(b - \frac{az}{100}\right) \cdot \frac{u}{100} : p$. Nennen wir nämlich für einen Augenblick den zur Rückzahlung verfügbaren Teil x, so beträgt das Aufgeld $xu : 100$. Folglich ist $x + \frac{xu}{100} = b - \frac{az}{100}\cdot$ Es ist $p = 1 + \frac{u}{100}\cdot$ Mithin $px = b - \frac{az}{100}\cdot$ Also wird das Kapital am Ende des ersten Jahres $a - \frac{b}{p} + \frac{az}{100p} = a \cdot \frac{q}{p} - \frac{b}{p}\cdot$

Nun kann man folgende Entwicklung machen:

Jahr 1:

Kapital: a; Zinsen: $a(q - p)$; verfügbarer Rest: $b - aq + ap$;

zur Tilgung verfügbar: $\frac{b}{p} - a\frac{q}{p} + a.$

Jahr 2:

Kapital: $a\frac{q}{p} - \frac{b}{p}$; Zinsen: $a\frac{q^2}{p} - aq - b\frac{q}{p} + b$;

verfügbarer Rest: $-a\frac{q^2}{p} + aq + b\frac{q}{p}$;

zur Tilgung verfügbar: $-a\frac{q^2}{p^2} + a\frac{q}{p} + b\frac{q}{p^2}\cdot$

Jahr 3:

Kapital: $a\frac{q^2}{p^2} - \frac{b}{p} - b\frac{q}{p^2}$;

Zinsen: $a\frac{q^3}{p^2} - a\frac{q^2}{p} - b\frac{q^2}{p^2} - b\frac{q}{p} + b\frac{q}{p} + b$;

verfügbarer Rest: $-a\frac{q^3}{p^2} + a\frac{q^2}{p} + b\frac{q^2}{p^2}$;

zur Tilgung verfügbar: $-a\frac{q^3}{p^3} + a\frac{q^2}{p^2} + b\frac{q^2}{p^3}\cdot$

Jahr 4:

Kapital: $a\frac{q^3}{p^3} - \frac{b}{p} - b\cdot\frac{q}{p^2} - b\cdot\frac{q^2}{p^3}\cdot$

Am Ende des n^{ten} Jahres ist also das Kapital:

$$a\frac{q^n}{p^n} - \frac{b}{p} - b\frac{q}{p^2} - b\frac{q^2}{p^3} - \cdots - b\cdot\frac{q^{n-1}}{p^n},$$

oder

$$a\frac{q^n}{p^n} - b\frac{q^n - p^n}{p^n(q-p)}.$$

Die Durchschnittszahlung b wird also

$$b = \frac{q^n(q-p)}{q^n - p^n}\,a. \tag{19}$$

Setzt man noch $\frac{p}{q} = r$, $q - p = \frac{z}{100}$, so wird

$$b = \frac{az}{100}\cdot\frac{1}{1-r^n}. \tag{20}$$

Bei Aufstellung eines nach dieser Grundlage zu bemessenden Tilgungsplans hat man wieder mit dem Umstande zu rechnen, daß die Tilgungen in runden Zahlen erfolgen und kann daher nur dem Durchschnittswerte b angenäherte Werte bei der jährlichen Gesamtzahlung angeben.

Wichtig ist auch noch die Berechnung mit halbjähriger Zinszahlung. Sei z der Zinsfuß und möge die Zinszahlung am 2. Januar und 1. Juli erfolgen. Ist a das Kapital, welches zum Januartermin aufgenommen sein mag, so zahlt man am 1. Juli $\frac{az}{200}$ *M* Zinsen. Kapital und Zinsen sind zusammen $a\left(1 + \frac{z}{200}\right) = ap$, usw., also am Ende des n^{ten} Jahres ap^{2n}. Es mag nun die Aufgabe so gestellt sein, daß jedesmal zum 1. Juli die Tilgung mit b *M* erfolgt, während die Zinszahlung zweimal im Jahr geschieht. Dann ist der Gesamtbetrag der Zinszahlung

$$\frac{az}{200}(p^{2n-1} + p^{2n-2} + \cdots + p + 1) = \frac{az}{200}\cdot\frac{p^{2n}-1}{p-1} = a(p^{2n}-1).$$

Die Tilgungen erreichen den Gesamtbetrag:

$$b(p^{2n-1} + p^{2n-3} + \cdots + p) = bp\frac{p^{2n}-1}{p^2-1}.$$

Daher entsteht die Gleichung:

$$ap^{2n} = a(p^{2n}-1) + bp\frac{p^{2n}-1}{p^2-1},$$

$$bp\frac{p^{2n}-1}{p^2-1} = a. \tag{21}$$

Hieraus kann man verschiedene Aufgaben bilden, z. B. die von Martus gestellte, in welcher $z = 4{,}5$; $b = \frac{a}{100}$ und n unbekannt ist.

§ 23. Kombination. Permutation.

Wenn n Buchstaben gegeben sind, so kann man sie in verschiedener Folge aufschreiben. Dasselbe gilt, wenn andere Dinge (Elemente) zu ordnen sind. Aufgabe der Permutationslehre ist, die verschiedenen Anordnungen anzugeben, ihre Zahl und ihre Eigenschaften zu studieren. Wir beginnen mit der vollständigen Niederschrift der einfachsten Fälle.

2	Elemente:	Permutationen:	*ab*, *ba*.
3	„	„	*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.
4	„	„	*abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*.

Wir können uns bei vier Elementen auf die erste Gruppe, in welcher a den ersten Platz behauptet, beschränken. Denn ebensoviel Permutationen erhält man, wenn b, c oder d an der Spitze steht. Im ganzen erhält man also 24 Permutationen. Nehmen wir fünf Buchstaben *abcde*, so stellen wir zunächst a an die Spitze und erhalten so viel Permutationen als *bcde* sich versetzen lassen, nämlich 24. Dann lassen wir statt a den Buchstaben b an die Spitze treten und bekommen wieder 24 neue Permutationen; im ganzen werden $5 \cdot 24 = 120$ erhalten.

Die Fortsetzung dieser Schlußweise läßt erkennen, daß bei n verschiedenen Elementen die Anzahl der Permutation ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Befinden sich unter den Elementen Gruppen von gleichen, etwa

$$aabbbc,$$

so möge die Anzahl der möglichen und verschiedenen Permutationen m sein. Wir denken sie alle aufgeschrieben. Nun ersetzen wir die gegebenen Elemente durch

$$a_1 a_2 b_1 b_2 b_3 c.$$

Dann wird für jede der aufgeschriebenen Anordnungen durch Vertauschung der $a_1 a_2$ eine zweite und durch Vertauschung der b aus beiden 5 neue, im ganzen $2 \cdot 6 = 12$ erhalten. So geht aus jeder

Anordnung eine Anzahl von 12 Anordnungen, aus m also $12m$ hervor. Die Gesamtzahl ist $6!$, also

$$12m = 720, \quad m = 60.$$

Die Ausdehnung auf die allgemeine Aufgabe ergibt: Wenn n Elemente gegeben sind, unter denen Gruppen von $h, k, l, \ldots$ gleichen Elementen vorkommen, so ist die Gesamtzahl der Permutationen:

$$\frac{n!}{h!\,k!\,l!\ldots}, \quad n = h + k + l + \cdots.$$

Wir wollen dies an einem Beispiele, dem ersten Verse aus den Oden des Horaz erläutern:

Maecenas atavis edite regibus. $n = 26$

aaaabcdeeeeegiiimnrssstuv.

$$P = \frac{26!}{4!\;5!\;3!\;3!\;2!},$$

$$P = 2^{15} \cdot 3^{6} \cdot 5^{5} \cdot 7^{3} \cdot 11^{2} \cdot 13^{2} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23,$$

$$P = 753\,442\,220\,512\,800\,000.$$

Vertauscht man in einer Permutation, etwa in *abcde* ein Element so mit einem andern, daß sie gegenseitig die Plätze wechseln, so erleidet die Permutation eine Transposition (Umsetzung). Man kann durch eine Folge von Umsetzungen jede Anordnung in eine beliebige andere umwandeln. So soll *abcde* in *dceab* umgewandelt werden.

abcde

1) *dbcae*, *a* mit *d*;

2) *dcbae*, *b* „ *c*;

3) *dceab*, *e* „ *b*.

Durch die Umsetzungen zerfallen die sämtlichen Anordnungen in zwei Klassen, je nachdem die Anzahl der Umsetzungen gerade oder ungerade ist. Für drei Elemente hat man z. B.

abc, *bca*, *cab* (geradzahlig),

acb, *cba*, *bac* (ungeradzahlig).

Es gilt nun der Satz: Durch eine gerade Anzahl Umsetzungen geht jede Anordnung der Elemente in eine Anordnung derselben Klasse über, durch eine ungerade Zahl verwandelt sich jede Anordnung der einen Klasse in eine solche der andern.

Für drei Elemente ist der Satz aus den aufgeschriebenen sechs Anordnungen ersichtlich.

Um ihn für vier Elemente zu beweisen, wollen wir zunächst die 24 Versetzungen ordnungsmäßig bilden. Zuerst schreiben wir die

sechs Versetzungen auf, bei denen a an der Spitze steht. Sie befolgen unser Gesetz, weil es sich um drei Elemente b, c, d handelt und für drei Elemente ist das Gesetz gültig. Dann bringen wir b an die Spitze. Das kostet eine Umsetzung, die erhaltene Anordnung $bacd$ gehört zu derjenigen Klasse, zu welcher $abcd$ nicht gehört. Die aus $bacd$ ableitbaren Versetzungen, welche b an seiner Stelle belassen, betreffen nur drei Elemente, befolgen also unter sich das Gesetz. Sie befolgen es aber auch gegen die mit a beginnenden Versetzungen. Denn $bacd$ geht durch eine zweite Umsetzung von b mit a in $abcd$ über und dasselbe gilt für jede der aus $bacd$ entspringenden, b an erster Stelle führenden Versetzungen. Hiernach gilt das Gesetz für vier Elemente und läßt sich so weiter allgemein beweisen. Wir haben hier ein Beispiel des Schlusses von n auf $n+1$.

Außer den Umsetzungen sind die Zyklen besonders wichtig. Eine zyklische Vertauschung ist eine solche, bei welcher das erste Element den Platz des zweiten erhält, das zweite den des dritten, das letzte den des ersten, z. B.

$$abc,\ bca,\ cab \quad \text{und} \quad abcd,\ bcda,\ cdab,\ dabc.$$

Die sämtlichen Versetzungen von drei Elementen gliedern sich in zwei Zyklen, nämlich außer den vorigen acb, cba, bac. Dies pflegt man kurz so zu bezeichnen: (abc) und (acb), indem gesetzt wird:

$$(abc) \quad \text{statt} \quad abc,\ bca,\ cab$$

und

$$(acb) \quad \text{„} \quad acb,\ cba,\ bac.$$

Ebenso kann man die 24 Versetzungen von vier Elementen ersetzen durch die sechs Zyklen:

$$(abcd),\ (abdc),\ (acbd),\ (acdb),\ (adbc),\ (adcb).$$

Dieselben 24 Versetzungen kann man auch darstellen, indem man passende dreigliedrige oder zweigliedrige Zyklen bildet. Genauer kann die Schulmathematik hierauf nicht eingehen.

Die Kombinationen.

Sind n Elemente gegeben, so kann man aus ihnen eine Gruppe von h Elementen herausgreifen. Diese Gruppe nennt man eine Kombination. Nach den Bildungsgesetzen unterscheidet man vier Klassen von Kombinationen, je nachdem Wiederholung und Versetzung unter den Elementen einer Gruppe zugelassen wird.

1. Klasse:	Kombinationen	ohne	Wiederholung,	ohne	Versetzung;
2.	„	„	„	„	mit	„
3.	„	„	mit	„	ohne	„
4.	„	„	„	„	mit	„

Am einfachsten sind die Kombinationen zweiter und vierter Klasse. Mit ihnen wollen wir den Anfang machen.

Kombinationen zweiter Klasse von n Elementen zu zweien haben nachstehendes Aussehen:

$$\begin{array}{ccccc} 1,2 & 21 & 31 & \dots & n1, \\ 1,3 & 23 & 32 & \dots & n2, \\ 1,4 & 24 & 34 & \dots & n3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1,n & 2n & 3n & \dots & n, n-1. \end{array}$$

Wir haben $n-1$ wagerechte Reihen, n senkrechte. Daher ist die Anzahl der Kombinationen $n(n-1)$.

Bilden wir die Kombinationen zu dreien, so erhalten wir 1 so oft an der Spitze, als die übrigen Elemente, also 2, 3, ..., n sich zu zweien kombinieren lassen. Das gibt nach dem vorigen $(n-1)(n-2)$ Kombinationen. Ebenso oft erhält jedes der übrigen Elemente 2, 3, 4, ..., n den ersten Platz. Folglich ist die Anzahl der Kombinationen zu dreien bei n Elementen $n(n-1)(n-2)$. Leicht erhält man in dieser Weise fortschreitend den Satz, daß die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung, aber mit Versetzung zu h aus n Elementen ist

$$C_2^h = n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1).$$

Kombinationen vierter Klasse von n Elementen zu zweien haben das Aussehen:

$$\begin{array}{cccc} 11 & 21 & \dots & n1, \\ 12 & 22 & \dots & n2, \\ 13 & 23 & \dots & n3, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1n & 2n & \dots & nn. \end{array}$$

Die Anzahl beträgt n^2.

Bildet man dieselben Kombinationen zu dreien, so steht das erste Element so oft an erster Stelle als die n Elemente sich zu zweien in dieser Weise verbinden lassen; desgleichen das zweite und alle folgenden. Also ist die Zahl der möglichen Kombinationen n^3. In dieser Weise fortschließend erkennt man, daß die Zahl der Kombinationen von n Elementen mit Wiederholung und mit Versetzung zu h ist

$$C_4^h = n^h.$$

Wenden wir uns jetzt der ersten Klasse zu. Seien n Elemente

gegeben. Betrachten wir die Versetzungen zu zweien, so kommt man auf folgende Reihe:

$$\begin{array}{lll} 12 & 23 & \ldots\ (n-1), n. \\ 13 & 24 & \\ 14 & \vdots & \\ \vdots & 2n & \\ 1n & & \end{array}$$

Vergleichen wir mit den Kombinationen zweiter Klasse S. 98, so kommt dort 12 und 21 vor, hier nur 12; dort 34 und 43, hier nur 34. Gleiches gilt von allen Kombinationen; daher ist die Anzahl der Kombinationen erster Klasse genau die Hälfte der Kombinationen zweiter Klasse, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

Betrachten wir gleich die Kombinationen erster Klasse von n Elementen zu h. Sie gehen in die Kombinationen zweiter Klasse zu h über, wenn man die Elemente jeder Kombination permutiert. Daher ist ihre Anzahl

$$C_1^h = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots h}.$$

Hieraus ergibt sich ein merkwürdiger Satz, den wir zunächst ableiten wollen. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\binom{n}{h} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots h}.$$

Denken wir uns die Kombinationen erster Klasse zu h aufgeschrieben. Das erste Element steht so oft an der Spitze als $n-1$ sich zu $h-1$ verbinden lassen, das zweite so oft als $n-2$ sich zu $h-1$ verbinden lassen, usw. Daher muß sein:

$$(1) \qquad \binom{n-1}{h-1} + \binom{n-2}{h-1} + \binom{n-3}{h-1} + \cdots + 1 = \binom{n}{h}.$$

Es ist z. B.

$$(2) \quad \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2} + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Ersetzt man n durch $n+1$, so wird aus (2):

$$(3) \quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} + \cdots + 1 = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Durch Subtraktion wird

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Dies ist richtig. Also ist (3) logische Folge von (2). Gilt also (2) für ein beliebiges n, so gilt es auch für $n+1$, also allgemein. Das

ist wieder ein Beweis durch vollständige Induktion, der sich mit Leichtigkeit auf (1) allgemein ausdehnen läßt; vergl. S. 97.

Wir sind nun imstande, die Anzahl der Kombinationen dritter Klasse zu bestimmen. Beginnen wir wieder mit den Kombinationen zu zweien.

Sie gestalten sich wie folgt:

$$\begin{array}{lll} 11 & 22 & \ldots\ nn. \\ 12 & 23 & \\ 13 & 24 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & 2n & \\ 1n & & \end{array}$$

Ihre Anzahl ist $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Die Kombinationen zu dreien beginnen mit 111 und 1 steht $\frac{n(n+1)}{2}$ mal an erster Stelle. 2 steht $\frac{n(n-1)}{2}$ mal, 3 steht $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ mal usw. an erster Stelle. Die Gesamtzahl ist

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \cdots + 1 = \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

So fortschließend findet man aus (1)

$$C_3{}^h = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots h} = \binom{n+h-1}{h}.$$

§ 24. Binomischer Lehrsatz.

In den ersten Lehrstunden der Arithmetik überzeugt man sich durch Ausrechnung von der Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Wir behaupten, es sei allgemein:

$$(1) \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots.$$

Zum Beweise dieser folgenreichen Behauptung überzeugen wir uns zunächst, daß sie für $n = 2, 3, 4$ richtig ist. Dann ersetzen wir rechts und links n durch $n+1$, so wird:

$$(2) \quad (1+x)^{n+1} = 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots.$$

Wir wollen nun zeigen, daß (2) eine logische Folge von (1) ist. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (1) mit $1+x$ und bestimmen rechts den Koeffizienten von x^h. Er wird die Summe der Koeffizienten von x^h und x^{h-1}, also

$$\frac{n(n-1)\dots(n-h+2)}{1\cdot 2\dots(h-1)}+\frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{1\cdot 2\dots h}$$
$$=\frac{n(n-1)\dots(n-h+2)}{1\cdot 2\dots(h-1)}\left(1+\frac{n-h+1}{h}\right)=\frac{(n+1)n\dots(n-h+2)}{1\cdot 2\dots h}.$$

Also ist bewiesen, daß (2) die Folge von (1) ist. (1) ist die Aussage des binomischen Lehrsatzes für die Zahl n, (2) die Aussage desselben Satzes für die folgende Zahl $n+1$. Ist der binomische Lehrsatz also für irgend ein ganzzahliges positives n richtig, so ist er es auch für $n+1$. Nun gilt er für $n=4$, also auch für $n=5$. Damit gilt er für $n=5$, also auch für $n=6$ usw. Hier haben wir ein neues Beispiel des Schlusses von n auf $n+1$.

Wir wollen hieraus sofort eine wichtige Folgerung ziehen. Seien m und n zwei positive ganze Zahlen. Bilden wir die binomischen Entwicklungen:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots,$$
$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots,$$

multiplizieren rechts und links, so muß die Entwicklung von $(1+x)^{m+n}$ herauskommen. Für den Koeffizienten von x^2 muß z. B. sein:

$$(3)\qquad \frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+mn+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}.$$

Die Entwicklung zeigt, daß dies identisch richtig ist.

Allgemein können wir schreiben:

$$(4)\qquad \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+n-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}$$
$$=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}+\frac{m(m-1)\cdots(m-h+2)}{1\cdot 2\cdots(h-1)}n$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-h+3)}{1\cdot 2\cdots(h-2)}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{1\cdot 2\cdots h}.$$

Diese Gleichung ist also sicher richtig, wenn m und n ganze positive Zahlen sind. Wir wollen beweisen, daß sie für beliebige m, n gilt. Zu diesem Zweck denken wir uns beiderseits nach Potenzen von m entwickelt und durch zweckmäßige Subtraktion alle Glieder von rechts fortgeschafft. Dann behaupten wir, daß alle Potenzen von m sich fortheben. Angenommen, dies sei nicht der Fall, sondern es mögen

einige Potenzen von m mit nicht verschwindenden Koeffizienten vorhanden sein, etwa:

$$\varphi(n) \cdot m^{\alpha} + \psi(n) \cdot m^{\beta} + \cdots + \vartheta(n) \cdot m^{\gamma} = 0.$$

Da nun $\alpha > \beta, \ldots > \gamma$ gesetzt werden kann und sicher m nicht in höherer als der h^{ten} Potenz erscheint, so müßte diese Gleichung für alle ganzzahligen m erfüllt sein. Das ist unmöglich, wenn nicht alle Koeffizienten Null sind. Eine Gleichung kann nicht mehr Wurzeln haben, als ihr Grad anzeigt. Siehe den Beweis S. 124.

Fragen wir nun, welchen Wert die Reihe hat

$$(5) \qquad y = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

wenn n einen beliebigen reellen Wert hat. Die allgemeine Vorzahl geht aus der vorgehenden hervor durch Multiplikation mit

$$\frac{n-h+1}{h} = -1 + \frac{n+1}{h}.$$

Diese Größe nähert sich, da $n + 1$ eine festbestimmte Zahl ist, h aber ohne Grenze wächst, immer mehr der Einheit -1. Das allgemeine Glied geht also aus dem vorhergehenden hervor durch Multiplikation mit $\left(-1 + \frac{n+1}{h}\right)x = -x + \frac{n+1}{h}x$. Ist nun x seinem Zahlwert nach ein echter Bruch, so kann der Zusatz $\frac{n+1}{h}x$ durch Steigerung von h unter jede angebbare Grenze herabgedrückt werden. Der Multiplikator $-x + \frac{n+1}{h}x$ wird also von einem gewissen h ab stets kleiner als ein angebbarer echter Bruch sein. Gehen wir um k Glieder weiter als das h^{te} Glied und nennen jenen echten Bruch seinem Zahlwert nach δ, so ist also das $h + k^{\text{te}}$ Glied seinem Zahlwert nach kleiner als $A_h \cdot \delta^k$, also beliebig klein. Die Reihe ist also, wenn $(x) < 1$, unbedingt konvergent (vgl. S. 90). (x) bedeutet den absoluten Zahlwert von x. Setzen wir $y = \varphi(n, x)$, so ist

$$\varphi(n, x) \cdot \varphi(m, x) = \varphi(n + m, x).$$

Es ist nun erlaubt, zwei unbedingt konvergente Reihen miteinander zu multiplizieren. Denn bricht man die beiden Faktoren an geeigneter hinreichend weitliegender Stelle ab und bildet das Produkt dieser beiden endlichen Reihen, so stimmt es mit dem Produkte der unendlichen Reihen bis zu einer beliebig hohen Stelle überein und die nicht übereinstimmenden weiteren Glieder sind zusammen kleiner als jede beliebige noch so kleine vorher festgesetzte Größe.

Die weitere allgemeine Behandlung der binomischen Reihe ist nicht Sache der Schulmathematik. Es sollen nur einige besondere Fälle hier untersucht werden.

1. $n = -1$.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Summe der Reihe:

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^k$$

zu bestimmen. Die Aufgabe ist schon S. 89, Nr. 13 gelöst worden.

2. $n = -2$.

Der Einfachheit wegen ersetzen wir x durch $-x$ und suchen zu bestimmen die Summe der endlichen Reihe:

(6) $$y = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (k+1)x^k.$$

Wir finden durch Multiplikation und folgende Subtraktion

$$yx = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (k+1)x^{k+1},$$

$$y(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k - (k+1)x^{k+1},$$

also

$$y(1-x) = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} - (k+1)x^{k+1},$$

$$y = \frac{1-(k+2)x^{k+1} + (k+1)x^{k+2}}{(1-x)^2}.$$

Nehmen wir $k = \infty$, $(x) < 1$, so wird $(k+2)x^{k+1}$ und $(k+1)x^{k+2}$ unendlich klein und

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

Ersetzt man x durch $-x$, so ist die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes für $n = -2$ bewiesen. Um zu zeigen, daß $(k+2)x^{k+1}$ mit wachsendem k unendlich klein wird, wenn $(x) < 1$, lassen wir k um eine Einheit wachsen und bilden dann den Quotienten. Er wird $\frac{k+3}{k+2}x$ oder $x + \frac{x}{k+2}$. Mit wachsendem k wird der Zuwachs kleiner als jede beliebige Größe, also nähert sich $\frac{k+3}{k+2}x$ beliebig dem x, also geht jedes folgende $(k+2)x^{k+1}$ aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einem echten Bruch hervor, muß also unendlich klein werden.

In dieser Weise kann man andere interessante Reihen bilden und ihre Summe nach elementarem Verfahren bestimmen. Als Beispiele dienen:

$$y = \sum_k k^2 x^k = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots + n^2 x^n,$$

$$y = \sum_k k^3 x^k = x + 8x^2 + 27x^3 + 64x^4 + \cdots + n^3 x^n.$$

Die Lösung gelingt auf einen Schlag durch Multiplikation der ersteren Reihe mit $(1-x)^3$, der zweiten mit $(1-x)^4$. Die erste Reihe ins unendliche fortgesetzt liefert den Wert

$$y = \frac{x + x^2}{(1-x)^3},$$

die zweite

$$y = \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4}.$$

3. Sei $n = \frac{1}{2}$.

Wir finden

(7) $$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \cdots$$

Die Reihe ist für $(x) < 1$ konvergent und mit sich selbst multipliziert muß sie die Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ nach Nr. 4, S. 101 ergeben. Also ist $y^2 = 1 + x$ und

(8) $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

Dem Vorzeichen muß sein positiver Wert beigelegt werden; denn für $x = 0$ ist die rechte Seite gleich Eins. Die Reihen (7) und (8) geben zu interessanten Beobachtungen Anlaß. Daß die Vorzahlen im Produkte von der zweiten an verschwinden, zeigen die Beispiele:

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0, \quad \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 0$$

$$-\frac{5}{128} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} - \frac{5}{128} = 0.$$

Die Nenner sind sämtlich Potenzen von 2, wie man durch vollständige Induktion nachweist. Es ist

$$\sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{1 + \frac{b}{a^2}}.$$

Daher

(9) $$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^3} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^5} - \cdots$$

Hierauf beruht die Methode der Quadratwurzelausziehung von Heron (vgl. § 15, S. 43). Soll aus der Zahl N die Quadratwurzel gezogen werden und ist n ein naher Wert derselben, so bilden wir nach Heron $\frac{1}{2}\left(n + \frac{N}{n}\right)$ und verwenden den so gewonnenen Wert als neues n für Gewinnung einer noch schärferen Annäherung usw. Für $N = a^2 + b$, $n = a$ folgt als erste Annäherung $a + \frac{1}{2}\frac{b}{a}$ und als zweite $a + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^3}$, wenn höhere Potenzen von $\frac{b}{a}$ unberücksichtigt bleiben. Soll die Ausziehung der Quadratwurzel auf eine hohe Anzahl Stellen getrieben werden, so ist für die Anwendung von (9) nötig, daß b im Verhältnis zu a möglichst klein sei; vgl. S. 42, 43.

4. Sei $n = \frac{1}{3}$.

Wir erhalten die Reihe:

$$y = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \cdots$$

Setzen wir kurz $y = \sum(-1)^{h+1} \cdot a_h x^h$, so wird:

$$a_2 = \frac{1}{9}, \quad a_3 = \frac{5}{3^4}, \quad a_4 = \frac{10}{3^5}, \quad a_5 = \frac{22}{3^6}, \quad a_6 = \frac{7 \cdot 22}{3^8}, \quad a_7 = \frac{17 \cdot 22}{3^9},$$

$$a_8 = \frac{5 \cdot 11 \cdot 17}{3^{10}}, \quad a_9 = \frac{5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23}{3^{12}}, \quad a_{10} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23}{3^{14}},$$

$$a_{11} = \frac{13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29}{3^{15}}, \quad a_{12} = \frac{8 . 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29}{3^{17}}, \quad a_{13} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29}{3^{18}}$$

$$a_{14} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29}{3^{19}}.$$

Sämtliche Nenner sind Potenzen von 3, wie sich durch vollständige Induktion zeigen läßt. Allgemein ist

$$a_h = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3h-4)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \ldots (3h)}, \quad h \geqq 2.$$

Erhebt man y ins Quadrat, so ergibt sich nach S. 102 die Reihe:

$$y^2 = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 - \frac{7}{243}x^4 + \frac{14}{729}x^5$$

$$- \frac{91}{6561}x^6 + \cdots = \sum(-1)^{h+1} \cdot a_h x^h.$$

$$a_h = \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3h-5)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \ldots (3h)}, \quad h \geqq 2.$$

Auch hier erhält man nach gehöriger Aufhebung im Nenner ganzzahlige Potenzen von 3. Bildet man nun $y \cdot y^2$, so erhält man wieder nach S. 102 rechts $1 + x$, indem die übrigen Glieder sich zerstören. Man leitet genau wie bei der Quadratwurzel leicht ab:

$$(10) \quad \begin{cases} \sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{1}{3}\frac{b}{a^2} - \frac{1}{9}\frac{b^2}{a^5} + \frac{5}{81}\frac{b^3}{a^8} - \frac{10}{243}\frac{b^4}{a^{11}} + \cdots \\ \left(\sqrt[3]{a^3 + b}\right)^2 = a^2 + \frac{2}{3}\frac{b}{a} - \frac{1}{9}\frac{b^2}{a^4} + \frac{4}{81}\frac{b^3}{a^7} - \frac{7}{243}\frac{b^4}{a^{10}} + \cdots \end{cases}$$

Den Wurzeln ist bei reellen a, b der reelle Wert beizulegen. Diese Reihen kann man zur Ausziehung der Kubikwurzel aus Zahlen verwenden. Man verschafft sich auf irgend eine Weise, etwa durch logarithmische Rechnung einen Wert für a, bildet a^3 und gewinnt so $b = N - a^3$, wenn N den gegebenen Radikanden bezeichnet. Ist die gegebene Zahl N eine ganze Zahl, so ist folgendes Verfahren noch zweckmäßiger. Es folgt aus

$$N\left(1-\frac{b}{N}\right)=a^3$$

die Gleichung

$$\sqrt[3]{N}=a\left(1-\frac{b}{N}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Daher:

$$\sqrt[3]{N}=a\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{N}+\frac{2}{9}\cdot\frac{b^2}{N^2}+\frac{14}{81}\cdot\frac{b^3}{N^3}+\frac{35}{243}\cdot\frac{b^4}{N^4}+\frac{91}{729}\cdot\frac{b^5}{N^5}+\cdots\right\}.$$

Der Vorteil besteht darin, daß die Potenzen von N leichter zu erhalten und alle Glieder positiv sind. Die am Schluß vorzunehmende Multiplikation mit a ist ein Nachteil, wenn a keine ganze Zahl ist.

Wie wir bei den Quadratwurzeln gesehen haben, ist der Ausgangspunkt für schnelle Berechnung der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen die Pellsche Gleichung (S. 43). Das Analogon hierzu besteht für die Kubikwurzel in der ganzzahligen Lösung der Gleichung

$$u^3+v^3D+w^3D^2-3uvwD=1.$$

Sei $x^3=D$, D eine ganze Zahl; $\varrho^3=1$, ϱ komplex. Wir setzen

(11) $$y=u+vx+wx^2,$$

(12) $$y'=u+vx\varrho+wx^2\varrho^2,$$
$$y''=u+vx\varrho^2+wx^2\varrho,$$

dann ist

(13) $$y'y''=u^2-vwD+(w^2D-uv)x+(v^2-uw)x^2.$$

Ist nun y gleich einer kleinen Größe, so ergibt sich mit Hülfe von $x^3=D$:

$$yx=wD+ux+vx^2,$$
$$yx^2=vD+wDx+ux^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und aus (11) bilden wir durch Multiplikation und Subtraktion

$$yv-ywx,$$
$$yvx-yu,$$
$$yx^2w-yu.$$

Dann ergibt sich:

$$x=\frac{w^2D-uv}{v^2-uw}+y\frac{v-wx}{v^2-uw},$$
$$x^2=\frac{u^2-vwD}{v^2-uw}+y\frac{xv-u}{v^2-uw},$$
$$x=\frac{u^2-vwD}{w^2D-uv}+y\frac{x^2w-u}{w^2D-uv}.$$

Nennen wir den Ausdruck (11) eine kubische Irrationalzahl, $y'y''$ die **Ergänzung**, so sind entsprechend dem Verfahren S. 44 imerm

ganzzahlige u, v, w so angebbar, daß y beliebig klein wird. Dann zeigt sich, daß die Quotienten der Ergänzungsvorzahlen (Gl. (13)) Näherungswerte für x und x^2 sind. Umgekehrt liefert die Ergänzung der Ergänzung eine kubische Irrationalzahl mit kleinem Wert. Es ergibt sich

$$yy'y'' = N = u^3 + v^3 D + w^3 D^2 - 3uvwD.$$

Diese ganze Zahl heißt Norm der kubischen Zahl. Für $N = 1$ haben wir die kubische Einheit und den Ausgangspunkt für eine schnelle Berechnung der Kubikwurzel auf viele Stellen. Die Norm der Ergänzung ist das Quadrat der ursprünglichen Norm. Löst man die Gleichung

$$u + vx + wx^2 = 0,$$

so erhält man näherungsweise Darstellungen der Kubikwurzel durch Quadratwurzeln. Eine genaue Darstellung dieser Art ist nicht möglich.

Beispiel:

$$x^3 = 2; \quad u^3 + 2v^3 + 4w^3 - 6uvw = 1.$$

Lösung:

$$u = -1, \quad v = 1, \quad w = 0.$$

Die kubische Zahl ist

$$y = x - 1,$$

die Ergänzung:

$$y'y'' = x^2 + x + 1 = z.$$

Die Potenzen von z liefern nun die gesuchten Näherungen:

$$\begin{aligned} z^2 &= 3x^2 + 4x + 5, \\ z^3 &= 12x^2 + 15x + 19, \\ z^4 &= 46x^2 + 58x + 73, \\ z^5 &= 177x^2 + 223x + 281. \end{aligned}$$

$$x = \frac{223}{177}, \quad x^2 = \frac{281}{177}.$$

Die wichtigste Folgerung aus dem binomischen Lehrsatz zieht der folgende Paragraph.

§ 25. Die Exponentialreihe.

Wir betrachten den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$.

In diesem soll n eine ganze Zahl sein, die wir positiv und sehr groß annehmen. Ebenso sei x eine ganze positive Zahl. Dann wird das allgemeine Glied in der Entwicklung:

$$\frac{nx(nx-1)(nx-2)\dots(nx-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots h}\cdot\frac{1}{n^h}$$

$$= \frac{1}{h!}x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)\left(x - \frac{3}{n}\right)\cdots\left(x - \frac{h-1}{n}\right).$$

Bilden wir den Quotienten mit dem vorhergehenden Gliede, so wird er

$$\frac{x}{h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{hn}.$$

Wenn $n > 1$, wird dieser Quotient mit wachsendem h ein echter Bruch, womit die unbedingte Konvergenz der Reihe bewiesen ist. Nun nehmen wir n so groß an, daß alle Glieder, welche n im Nenner haben, beliebig klein werden. Dann ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

Setzen wir nun $x = 1$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, so wird

(1) $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots,$$

$$e = 2{,}71828182846\ldots.$$

Man hätte auch auf andere Weise zu diesem Ergebnisse gelangen können. Bildet man die Reihen:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}x^n, \quad \varphi(y) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}y^n,$$

so ist

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2 + \cdots = \varphi(x+y).$$

Hieraus folgt

$$\varphi(x+y+z+\cdots) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)\cdot\varphi(z)\ldots,$$

$$\varphi(nx) = (\varphi(x))^n;$$

für ganzzahlige x also

$$\varphi(x) = (\varphi(1))^x = e^x,$$

wenn $\varphi(1)$ mit e bezeichnet wird.

e ist eine der wichtigsten Zahlen der Mathematik. Über ihre Geschichte s. Tropfke II, 133.

Die Reihe (1) ist für jedes x (ganz, gebrochen, negativ, komplex) konvergent und eignet sich daher zur Erklärung für die bisher unzugänglichen Fälle, in welchen der Exponent irrational oder komplex ist. Die Gleichung

(2) $$e^x = y$$

erscheint in anderer Schreibart als

(3) $$x = l(y),$$

gesprochen: x ist der natürliche Logarithmus von y. Hierin liegt keinerlei Festsetzung über die Natur der logarithmischen Funktion und die Möglichkeit ihrer zahlenmäßigen Berechnung. Allerdings werden wir an diese Aufgabe jetzt herantreten. Aus (3) folgt

$$e^{l(1+x)} = 1 + x,$$

also auch für ein beliebiges n, welches wir aber als reell annehmen können:

$$e^{n\,l(1+x)} = (1 + x)^n.$$

Hieraus folgt die Entwicklung

$$1 + nl(1 + x) + \frac{n^2}{2} l^2(1 + x) + \cdots = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots.$$

Ist $x < 1$, so sind die beiderseitigen Entwicklungen konvergent, es folgt also:

$$l(1 + x) + \frac{n}{2} l^2(1 + x) + \cdots = x + \frac{n-1}{2} x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \cdots.$$

Diese Gleichung gilt unabhängig von dem für n anzunehmenden Werte. Wir lassen es unendlich klein werden und erhalten:

$$(4) \qquad l(1 + x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \cdots.$$

Aus dieser Formel, der logarithmischen Reihe, kann man leicht Methoden zur schnellen Berechnung der Logarithmen ableiten. Es ist

$$l(1 - x) = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \ldots,$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \cdots\right\},$$

also für

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{z+u}{u}, \quad x = \frac{z}{z+2u},$$

$$(5) \quad l(z + u) = l(u) + 2\left\{\frac{z}{z+2u} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{z+2u}\right)^5 + \cdots\right\}.$$

So ist

$$l(2) = 2\left\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5} \cdot (\tfrac{1}{3})^5 + \cdots\right\},$$

$$l(3) = l(2) + 2\left\{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 + \cdots\right\},$$

$$l(4) = 2l(2) = l(3) + 2\left\{\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{7})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{7})^5 + \cdots\right\}.$$

Allgemein ist

$$l(n + 1) = l(n) + 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \cdots\right\}.$$

Setzt man

$$z + u = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4, \quad z = 1,$$

so wird

$$u = (x + 1)(x + 3),$$

$$2l(x + 2) - l(x + 1) - l(x + 3) = 2\left\{\frac{1}{2x^2 + 8x + 7} + \cdots\right\}.$$

Ist $x > 1000$, so ist für sechsstellige Rechnung richtig

$$l(x+3) = 2l(x+2) - l(x+1).$$

Diese Formel gilt für jedes Logarithmensystem.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \log 2480 &= 3{,}394\,4517 \\ \log 2482 &= \underline{3{,}394\,8018} \\ & 6{,}789\,2535 \\ \log 2481 &= 3{,}394\,6268 \cdot 2 \\ &= 6{,}789\,2536. \end{aligned}$$

Aus den natürlichen Logarithmen werden die Zehnerlogarithmen abgeleitet wie folgt. Für den Zehnerlogarithmus besteht die Erklärungsgleichung

$$10^{\log x} = x.$$

Nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so folgt

$$\log x \cdot l\,10 = lx,$$

also

$$\log x = mlx.$$

Hier ist

$$m = \frac{1}{l\,10} = 0{,}43429448$$

der Modulus der Zehnerlogarithmen. Da $le = 1$, so ist auch

$$\log e = m.$$

Eine der wichtigsten Folgerungen aus unseren Entwicklungen betrifft die trigonometrischen Funktionen. Wir setzen:

(6) $$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

und bezeichnen diese Gleichung als Erklärung der Funktionen $\cos x$ und $\sin x$. Aus (6) folgt:

(7) $$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \end{cases}$$

Diese Reihen sind konvergent für jeden Wert von x und wir werden nachweisen, daß sie mit den bekannten trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ identisch sind, wenn der Winkel nach natürlichem Maß (Länge des mit dem Radius 1 beschriebenen Bogens zwischen den Schenkeln des betreffenden Winkels um den Scheitelpunkt als Zentrum) gemessen wird.

Aus (6) folgt:

$$(8)\quad \begin{cases} \sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1, \quad \sin(-x) = -\sin x, \\ \cos(-x) = \cos x, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \text{und die Additionstheoreme} \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Die letzten Gleichungen ergeben sich aus

$$e^{xi} \cdot e^{-xi} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x),$$
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x;$$

und ebenso durch Multiplikation:

$$e^{xi} \cdot e^{yi} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y),$$

während aus (6) bei Ersetzung von x durch $x + y$ folgt

$$e^{(x+y)i} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{xi} \cdot e^{yi}.$$

Endlich folgt aus (7):

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Bei Entwicklung der Lehre von den trigonometrischen Funktionen verfährt man folgendermaßen. Zunächst erklärt man $\sin x$ als Quotienten der Gegenkathete durch die Hypotenuse, $\cos x$ als Quotienten der anliegenden Kathete durch die Hypotenuse. Das Winkelmaß ist gleichgültig. Die Erklärung hat nur Sinn für spitze Winkel. Dann beweist man geometrisch die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und die Additionstheoreme. Aus diesen Gleichungen ergeben sich rein analytisch, ohne Zuhülfenahme geometrischer Überlegungen die Subtraktionstheoreme und aus diesen die Gleichungen $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

Hiermit ist bewiesen, daß Gleichung (6) und die geometrische Erklärung zu denselben Ergebnissen führen, die wir unter (8) zusammengestellt haben. Grundlegend sind unter diesen Ergebnissen die Additionstheoreme und die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Diese kann man daher auch in der Trigonometrie als Erklärung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ aufstellen. Dieser Wechsel ist sogar notwendig, weil die geometrische Erklärung versagt, wenn man über spitze Winkel hinausgeht.

Man kann auch unmittelbar zur Reihenentwicklung gelangen mit Hülfe der Formel

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n}\right)^n,$$

indem man für n eine hinreichend große Zahl nimmt, so daß $\cos\frac{x}{n} = 1$ und $\sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}$ gesetzt werden darf.

Endlich kann man auch mit Hülfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu einer Reihenentwicklung gelangen, welche jetzt gezeigt werden soll. Seien zwei konvergente Reihen gegeben:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots.$$

Es sei nun für beliebig viele beliebig kleine Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$, $\varphi(x_\alpha) = \psi(x_\alpha)$, so behaupten wir, daß die Vorzahlen der beiden Reihen übereinstimmen, also

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \text{ usw.}$$

Beweis. Die Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

besteht für einen Wert $x = x_1$ von beliebiger Kleinheit. Da die Reihen konvergent sind, können die Summen

$$a_1 + a_2 x + \cdots \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 x + \cdots$$

nur einen bestimmten endlichen Wert haben. Unter den unzähligen Werten $x_1, x_2, \ldots$, welche $\varphi(x_\alpha) = \psi(x_\alpha)$ machen, wähle ich einen solchen, daß die Produkte

$$x_\alpha(a_1 + a_2 x_\alpha + \cdots) \quad \text{und} \quad x_\alpha(b_1 + b_2 x_\alpha + \cdots)$$

hinreichend klein werden. Dann folgt $a_0 = b_0$. Hieraus ergibt sich nach Division mit x:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots.$$

Diese Gleichung ist wieder richtig für unzählig viele Werte beliebiger Kleinheit $x_1, x_2, \ldots$, nur $x = x_\alpha$ ausgeschlossen. Wir können also durch Anwendung obiger Schlußweise finden $a_1 = b_1$ usw. Damit ist der Beweis geliefert.

Jetzt wollen wir an die Entwicklung herantreten. Sei

$$\sin x = ax + bx^3 + cx^5 + \cdots,$$
$$\cos x = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \cdots.$$

Da $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos x = \cos(-x)$ ist, können in der Reihe für $\sin x$ keine geraden, in der für $\cos x$ keine ungeraden Potenzen vorkommen. Die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ führt auf die Reihengleichung:

$$0 = (2\alpha + a^2)x^2 + (2\beta + \alpha^2 + 2ab)x^4 + (2\gamma + 2\alpha\beta + 2ac + b^2)x^6 + \cdots.$$

Diese Gleichung besteht für jeden Wert, für welchen die Reihen konvergieren, also für unendlich viele, beliebig kleine, voneinander verschiedene Werte; also sind die Bedingungen erfüllt und die Vergleichung der Vorzahlen ist erlaubt. Die entstehenden Gleichungen:

$$\alpha = -\frac{a^2}{2}, \quad b = \frac{-2\beta - \alpha^2}{2a}, \quad c = \frac{-2\gamma - 2\alpha\beta - b^2}{2a}$$

zeigen, daß die $b, c, \ldots$ sich eindeutig aus den $a, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ergeben. Es ist aber auch

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

also:

$$1 + 4\alpha x^2 + 16\beta x^4 + \cdots = 1 + 4\alpha x^2 + (4\beta + 2\alpha^2)x^4 + \cdots.$$

Auch diese Gleichung besteht wieder für unendlich viele, unendlich kleine, voneinander verschiedene Werte. Die Vorzahlen sind also gleich und es ist

$$\beta = -\frac{a^4}{24}, \quad b = -\frac{a^3}{6} \text{ usw.}$$

Man findet also

$$\sin(x) - ax = \frac{1}{6}a^3x^3 + \cdots,$$

$$\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{24}a^4x^4 - \cdots.$$

Die Größe a bleibt unbestimmt. Dies ist auch ganz natürlich. Denn die bisher benutzten Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} \sin(x) = -\sin(-x), \quad \cos(x) = \cos(-x), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \qquad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1, \quad \sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1 \end{cases}$$

gelten auch für $\sin(gx)$ und $\cos(gx)$, wo g beliebig. Man sieht also, daß zu den Gleichungen (9) noch eine, etwa

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{für} \quad x = 0$$

hinzukommen muß. Dann reichen vorstehende Gleichungen aber völlig aus und bilden also in ihrer Gesamtheit eine Erklärung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$.

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten ist mit Recht sehr geschätzt. Aber sie gilt nur, soweit die Reihen konvergent sind. Daher darf nicht unterlassen werden, die Konvergenz in jedem Falle wenigstens nachträglich zu untersuchen. Aus

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

folgt

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{1}{2}\pi i} = i.$$

Daraus folgt

$$2\pi i = l\,1, \quad \pi i = l(-1), \quad \tfrac{1}{2}\pi i = l(i).$$

Setzt man

$$a + bi = r(\cos x + i \sin x),$$

so folgt

$$l(a + bi) = lr + xi.$$

Zu beachten ist besonders

$$l(-a) = l(-1) + l(a) = \pi i + l(a).$$

Die Logarithmen negativer Zahlen sind komplexe Größen.

Die Gleichung (6) erscheint in anderer Schreibart als

$$xi = l(\cos x + i \sin x),$$

ebenso

$$-xi = l(\cos x - i \sin x),$$

folglich

$$2xi = l\frac{1 + i\operatorname{tg} x}{1 - i\operatorname{tg} x}.$$

Nach Entwicklung der logarithmischen Reihe folgt

(10) $$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \cdots.$$

Diese Reihe bietet die Möglichkeit, π zu berechnen.

Nach dem Additionstheorem der Tangensfunktion ist

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Ersetzt man die Gleichung $u = \operatorname{tg} x$ durch die andere Schreibart

$$x = \operatorname{arc\,tg} u,$$

gesprochen: arcus tg u; Bogen, dessen Tangens den Wert u hat, so wird

(10a) $$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\frac{u + v}{1 - uv}.$$

So ist

(10b) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Da man nun (10) die Form erteilen kann:

(11) $$\operatorname{arc\,tg} u = u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + \cdots,$$

so erhält man sofort eine brauchbare Reihe.

Aus (10a) ergibt sich weiter:

$$2\operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,tg}\frac{2u}{1 - u^2},$$

$$3\operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,tg}\frac{3u - u^3}{1 - 3u^2},$$

$$4\operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,tg}\frac{4u - 4u^3}{1 - 6u^2 + u^4}.$$

Also

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{3}{4}, \quad 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4} = \frac{8}{15}, \quad 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \frac{5}{12},$$

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \frac{120}{119}.$$

Nun ist

$$\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+u}{1-u},$$

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,tg} \frac{1-u}{1+u}.$$

Daher

$$\frac{\pi}{4} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Hieraus ergibt sich die sehr zweckmäßige Formel:

(12) $$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Noch findet man:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1}$$

Daher:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7},$$

folglich

(13) $$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{n^2+2n+1}.$$

Daher

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8},$$

(14) $$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8}.$$

Nach der aus (10b) abzuleitenden Formel

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8}$$

hat Dahse π auf 200 Dezimalen berechnet. Diese Rechnung ist noch weiter geführt und zwar bis über 700 Stellen von Shanks. Siehe Tropfke II, 131. Weitere Entwicklungen werden in der Trigonometrie gegeben.

§ 26. Die Gleichungen dritten und vierten Grades.

Jede Gleichung dritten Grades kann in die Form gesetzt werden:

(1) $$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

Um sie zur Lösung vorzubereiten, setzen wir

$$x = y + \alpha$$

und finden:

$$y^3 + (3\alpha + a_1)y^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)y + \alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 = 0.$$

Nun setzen wir

$$a_1 + 3\alpha = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = -\frac{a_1}{3}$$

und erhalten:

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right)y + a_3 - \frac{1}{3}a_1 a_2 + \frac{2}{27}a_1^3 = 0.$$

Folglich kann jede Gleichung dritten Grades in die Form gesetzt werden:

(2) $$x^3 + px + q = 0,$$

in welcher das mit x^2 multiplizierte Glied fehlt.

Nun setzen wir

$$x = z + u.$$

Dann wird

$$x^3 = z^3 + u^3 + 3zu(z + u)$$

oder

(3) $$x^3 - 3zux - z^3 - u^3 = 0.$$

Über die beiden Buchstaben z und u können wir noch verfügen. Wir setzen:

$$-3zu = p, \quad -z^3 - u^3 = q.$$

Dann wird

$$u = -\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{z}, \quad z^3 - \frac{1}{27}\cdot\frac{p^3}{z^3} = -q,$$

also

$$z^6 + qz^3 = \frac{1}{27}p^3,$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Da $z^3 + u^3 = -q$, so folgt

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Es ergibt sich also

(4) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Zunächst bemerken wir, daß das Vorzeichen der Quadratwurzel keinen Unterschied macht. Denn die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung (4) sind symmetrisch gebaut. Ferner beachten wir, daß jede Kubikwurzel dreiwertig ist. Setzen wir $\varrho^3 = 1$, so ist

$$\varrho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \varrho^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad \varrho^4 = \varrho \text{ usw.}$$

Daher erhalten wir drei Werte für z, nämlich

$$z, \quad \varrho z, \quad \varrho^2 z$$

und mithin

$$x_1 = z - \frac{1}{3}\frac{p}{z}, \quad x_2 = z\varrho - \frac{1}{3}\frac{p}{z}\varrho^2, \quad x_3 = z\varrho^2 - \frac{1}{3}\frac{p}{z}\varrho.$$

Ist p negativ und $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$, so erscheint x in der Form

$$x = \sqrt[3]{a+bi} + \sqrt[3]{a-bi},$$

wo a und b reell sind. Dieser Fall bedarf einer besonderen Untersuchung. Wir unterscheiden drei Fälle:

$$1)\ A = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0; \qquad 2)\ A = 0; \qquad 3)\ A < 0.$$

Der Bequemlichkeit wegen setzen wir $-\frac{q}{2} = a$, so wird:

$$z = \sqrt[3]{a + \sqrt{A}}, \quad u = \sqrt[3]{a - \sqrt{A}} = -\frac{p}{3z}.$$

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

sind, wenn wir setzen

$$z = \sqrt[3]{a + \sqrt{A}}, \quad u = \sqrt[3]{a - \sqrt{A}}$$

und unter der dritten Wurzel für $A > 0$ den reellen Wert verstehen:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = z + u, \quad x_2 = z\varrho + u\varrho^2, \quad x_3 = z\varrho^2 + u\varrho, \\ a = -\frac{q}{2}, \quad A = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad \varrho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

x_1 ist reell, x_2 und x_3 konjugiert komplex. Es ist

$$x_2 + x_3 = z(\varrho + \varrho^2) + u(\varrho + \varrho^2) = -z - u = -x_1,$$
$$x_2 x_3 = z^2 + u^2 + uz(\varrho + \varrho^2) = z^2 + u^2 - uz.$$

Zweiter Fall. $A = 0$.

Es ist $z = u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ und

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad x_2 = z(\varrho + \varrho^2) = -z, \quad \text{ebenso} \quad x_3 = -z.$$

Also ist

(6) $$x_1 = \sqrt[3]{-4q}, \quad x_2 = x_3 = -\frac{x_1}{2}.$$

In diesem Falle sind zwei Wurzeln einander gleich, alle drei reell.

Dritter Fall. $A < 0$.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$a = -\frac{q}{2}, \quad b^2 = -\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0.$$

Dann ist die Kubikwurzel aus $a + bi$ zu berechnen. Wir setzen:

$$\sqrt[3]{a + bi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

und finden $r = \sqrt[6]{a^2 + b^2}$ reell und positiv; $a^2 + b^2 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$,

$$\cos(3\varphi) = \frac{a}{r^3}, \quad \sin(3\varphi) = \frac{b}{r^3}.$$

Für φ ergeben sich dann drei Werte:

$$\varphi_1, \quad \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_1 + \frac{4\pi}{3}.$$

Ist nun

$$z = \sqrt[3]{a + bi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so ist

$$u = -\frac{1}{3}\frac{p}{z} = \frac{\sqrt[3]{a^2 + b^2}}{z} = r(\cos\varphi - i \sin\varphi).$$

Folglich erhält man die drei reellen Werte:

(7) $$\begin{cases} x_1 = 2r\cos\varphi_1, \quad x_2 = 2r\cos\left(\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \\ x_3 = 2r\cos\left(\varphi_1 + \frac{4\pi}{3}\right). \end{cases}$$

Dabei ist

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$a = -\frac{q}{2}, \quad b^2 = -\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad a^2 + b^2 = r^6,$$

$$\cos(3\varphi) = \frac{a}{r^3}, \quad \sin(3\varphi) = \frac{b}{r^3}.$$

b kann positiv genommen werden, φ_1 daher immer spitz.

1. Beispiel:

$$x^3 + 3x = 8.$$

$$p = 3, \quad q = -8, \quad A = 16 + 1 = 17.$$

$$z = \sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}, \quad u = \sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}.$$

$$\log 17 = 1{,}2304489$$
$$\tfrac{1}{2} \log 17 = 0{,}6152244$$
$$\sqrt{17} = 4{,}123105$$
$$z = \sqrt[3]{8{,}123105}, \quad u = -\sqrt[3]{0{,}123105}$$
$$\log 8{,}123105 = 0{,}9097221$$
$$\log z = 0{,}3032407$$
$$z = 2{,}010207$$
$$\log 0{,}123105 = 2{,}0902599 - 3$$
$$\log(-u) = 0{,}6967533 - 1$$
$$u = -0{,}4974545$$
$$z = 2{,}010207$$
$$x = 1{,}5127525$$

Probe:

$$\log x = 0{,}1797678$$
$$3 \log x = 0{,}5393034$$
$$x^3 = 3{,}461811$$
$$3x = 4{,}538257$$
$$8{,}000068.$$

Die Genauigkeit reicht nur bis zur fünften Stelle nach dem Komma:

$$x_1 = 1{,}51275.$$

Für die komplexen Wurzeln findet man

$$x_2 = -\frac{z+u}{2} + \frac{z-u}{2}\sqrt{3} \cdot i,$$
$$x_2 = -0{,}75638 + i \cdot 1{,}25383 \cdot \sqrt{3},$$
$$x_3 = -0{,}75638 - i \cdot 1{,}25383 \cdot \sqrt{3}.$$
$$x_2 = -0{,}75638 + 2{,}17170\, i = -a + bi.$$

Probe:

$$\log 0{,}75638 = 0{,}8787400 - 1$$
$$2 \log 0{,}75638 = 0{,}7574800 - 1$$
$$3 \log 0{,}75638 = 0{,}6362200 - 1$$
$$\log 2{,}17170 = 0{,}3367993$$
$$2 \log 2{,}17170 = 0{,}6735986$$
$$3 \log 2{,}17170 = 1{,}0103979$$

$$\begin{aligned} 2\log b &= 0{,}6735986 \\ \log a &= 0{,}8787400 - 1 \\ \log 3 &= 0{,}4771213 \\ \hline & \ 1{,}0294599 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a^3 &= -0{,}43273 \\ 3ab^2 &= 10{,}70188 \\ \hline & \ 10{,}26915 \\ -3a &= 2{,}26914 \\ \hline & \ 8{,}00001: \quad \text{stimmt.} \end{aligned}$$

2. **Beispiel:**

$$x^3 - 48x - 128 = 0,$$

$$p = -48, \quad q = -128, \quad A = 64^2 - 16^3 = 0,$$

$$z = u = \sqrt[3]{+64} = 4, \quad x_1 = 8, \quad x_2 = x_3 = -4.$$

3. **Beispiel:**

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Ist $\alpha^{13} = 1$, α komplex, so ist $x = \alpha + \alpha^8 + \alpha^{12} + \alpha^5$. Wir setzen $x = y - \frac{1}{3}$ und finden:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - y^2 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{27} \\ x^2 &= \phantom{y^3 -{}} y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} \\ -4x &= - 4y + \frac{4}{3} \\ 1 &= \phantom{y^3 - y^2 - 4y + {}} 1 \\ \hline 0 &= y^3 - \frac{13}{3}y + \frac{65}{27}. \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung zu lösen:

$$x^3 - \frac{13}{3}x + \frac{65}{27} = 0.$$

$$p = -\frac{13}{3}, \quad q = \frac{65}{27}, \quad A = \frac{25 \cdot 13^2}{4 \cdot 27^2} - \frac{13^3}{27^2} = -\frac{13^2}{27^2} \cdot \frac{27}{4},$$

$$A = -\frac{169}{108}.$$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{65}{54} + i\frac{13\sqrt{3}}{18}} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$r^3 \cdot \cos 3\varphi = -\frac{65}{54}, \quad r^3 \cdot \sin 3\varphi = \frac{13\sqrt{3}}{18}.$$

$$r^6 = \frac{13^3}{27^2}.$$

$$\log 13 = 1{,}1139434; \quad \log 27 = 1{,}4313638$$

$$3 \log 13 = 3{,}3418302; \quad 2 \log 27 = 2{,}8627276$$

$$\begin{array}{r} 2{,}8627276 \\ \hline 6 \log r = 0{,}4791026 \\ 3 \log r = 0{,}2395513 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log 13 = 1{,}1139434 & \\ \frac{1}{2} \log 3 = 0{,}2385606 & \Big\} + \\ \hline 1{,}3525040 & \\ \log 18 = 1{,}2552725 & \Big\} - \\ \hline 0{,}0972315 & \\ 3 \log r = 0{,}2395513 & \Big\} - \\ \hline 9{,}8576802 - 10 & \end{array}$$

$$3\varphi = 180^0 - 46^0\, 6'\, 7'', 58 = 133^0\, 53'\, 52'', 42.$$

$$\varphi_1 = 44^0\, 37'\, 57'', 47,$$

$$\varphi_2 = 164^0\, 37'\, 57'', 47; \quad \varphi_2' = 15^0\, 22'\, 2'', 53,$$

$$\varphi_3 = 284^0\, 37'\, 57'', 47; \quad \varphi_3' = 75^0\, 22'\, 2'', 53.$$

$$x_1 = 2r \cos \varphi_1, \quad x_2 = -2r \cos \varphi_2', \quad x_3 = 2r \cos \varphi_3'.$$

$$\begin{array}{rl} \log r = 0{,}0798504 & \\ \log 2 = 0{,}3010300 & \Big\} + \\ \hline 0{,}3808804 & \\ \log \cos \varphi_1 = 9{,}8522519 & \Big\} + \\ \hline 0{,}2331323 & \end{array}$$

$$x_1 = 1{,}710536$$

$$\begin{array}{rl} \log (2r) = 0{,}3808804 & \\ \log \cos \varphi_2' = 9{,}9841881 & \Big\} +; \\ \hline 0{,}3650685 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log (2r) = 0{,}3808804 & \\ \log \cos \varphi_3' = 9{,}4024685 & \Big\} + \\ \hline 0{,}7833489 - 1 & \end{array}$$

$$x_2 = -2{,}317760 \qquad \begin{array}{rl} x_3 = 0{,}607224 & \\ x_1 = 1{,}710536 & \Big\} + \\ \hline 2{,}317760 & \end{array}$$

Diese Wurzeln genügen der umgeformten Gleichung.

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ sind demnach:

$$x_1 = 1{,}377203, \quad x_2 = -2{,}651093, \quad x_3 = 0{,}273891.$$

Weil die Probe $x_1 + x_2 + x_3 = -1$ stimmt und die drei Wurzeln unabhängig voneinander berechnet wurden, genügt die Probe durch Einsetzung einer Wurzel in die Gleichung. Wir wählen x_1:

$$\log x_1 = 0{,}1389979;$$

$$2 \log x_1 = 0{,}2779958; \qquad x_1^2 = 1{,}896688$$

$$3 \log x_1 = 0{,}4169937; \qquad \underline{x_1^3 = 2{,}612123}$$

$$4{,}508811$$

$$\underline{4x_1 = 5{,}508812}$$

stimmt.

Wie sich zeigen läßt, ist $x_1 x_2 = x_2 - 1$; $x_1 x_3 = x_1 - 1$.

Besprechung der Cardanischen Formel.

Wir fanden:

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$x_1 = z + u, \quad x_2 = z\varrho + u\varrho^2, \quad x_3 = z\varrho^2 + u\varrho,$$

$$z^3 + u^3 = -q, \quad 3zu = -p.$$

Es ist also, da $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$ ist:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2\varrho + x_3\varrho^2 = 3u,$$

$$x_1 + x_2\varrho^2 + x_3\varrho = 3z.$$

Ferner ist

$$(z^3 - u^3)^2 = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = 4A.$$

Für die linke Seite können wir setzen

$$(z - u)^2(z^2 + zu + u^2)^2 = (z - u)^2(z - \varrho u)^2(z - \varrho^2 u)^2.$$

Nun ist aber, wie sich durch Subtraktion aus den obigen für $3u$ und $3z$ gewonnenen Gleichungen ergibt,

$$3(z - u) = (x_2 - x_3)(\varrho^2 - \varrho),$$

$$3(z - \varrho u) = (x_1 - x_3)(1 - \varrho),$$

$$3(z - \varrho^2 u) = (x_1 - x_2)(1 - \varrho^2).$$

Daher durch Multiplikation, indem

$$(1 - \varrho)(1 - \varrho^2) = 1 - \varrho - \varrho^2 + \varrho^3 = 3 \quad \text{ist},$$

$$27(z - u)(z - \varrho u)(z - \varrho^2 u) = 3\varrho(\varrho - 1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),$$

also, weil

$$3\varrho(\varrho - 1) = -3i\sqrt{3} \quad \text{ist,}$$

(8) $$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -108A = D.$$

Aus dieser Formel erkennt man die Bedeutung der Größe D. Sind die drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 reell, so ist D positiv. Sind zwei einander gleich, so ist $D = 0$; ist x_1 reell, x_2 und x_3 komplex, etwa $x_2 = a + bi$, $x_3 = a - bi$, so wird $x_1 = -2a$ und D negativ. Daher wird D die Diskriminante der Gleichung genannt.

Bevor wir zu den Gleichungen vierten Grades übergehen, müssen wir einige wichtige Sätze aus der allgemeinen Gleichungslehre erwähnen.

1. Wenn die Gleichung

(9) $$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

die Eigenschaft hat, daß $f(\alpha) = 0$, so ist die rechte Seite durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

Beweis. Es ist

$$f(x) - f(\alpha) = x^n - \alpha^n + a_1(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - \alpha^{n-2}) + \cdots$$
$$+ a_{n-1}(x - \alpha).$$

Nun ist, wie wir früher gesehen haben (S. 89, Gl. (14))

$$x^h - \alpha^h = (x - \alpha)(x^{h-1} + \alpha x^{h-2} + \cdots + \alpha^{h-1}).$$

Daher ist $x^h - \alpha^h$ gleich dem Produkte aus $x - \alpha$ und einer ganzen Funktion $h - 1^{\text{ten}}$ Grades von x, folglich

$$f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)g(x),$$

wo $g(x)$ eine ganze Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades von x ist. Nach der Annahme ist $f(\alpha) = 0$, also die Behauptung bewiesen.

2. Wenn $f(x)$ für $x = \alpha$ und $x = \beta$ verschwindet, so ist $f(x)$ durch das Produkt $(x - \alpha)(x - \beta)$ teilbar.

Beweis. Nach 1. können wir $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ darstellen. Nach der Vorraussetzung ist auch $f(\beta) = (\beta - \alpha)g(\beta) = 0$. Da nun $\beta - \alpha$ nicht verschwindet, so muß $g(\beta) = 0$ sein. Deshalb ist $g(x)$ darstellbar als $g(x) = (x - \beta)h(x)$. Also

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \cdot h(x).$$

Im Beweise wurde vorausgesetzt, daß $\alpha \neq \beta$ (α ungleich β) sei. Ist $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ und findet sich, daß $g(\alpha) = 0$, so ist $f(x) = (x - \alpha)^2 h(x)$. In diesem Falle hat $f(x)$ die doppelte Wurzel $x = \alpha$.

3. Wenn $f(x)$ für n verschiedene Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwindet, so ist identisch:

(10) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n).$$

Diese Behauptung ist eine Folge von 2. Der Ausdruck (10) zeigt, daß $f(x)$ für keinen weiteren Wert, der von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschieden ist, Null werden kann. Eine Gleichung n^{ten} Grades hat niemals mehr als n Wurzeln. Von diesem wichtigen Satze haben wir wiederholt Gebrauch gemacht, z. B. S. 102. Besteht die Gleichung $f(x) = g(x)$, wo $f(x)$ und $g(x)$ beide ganze Funktionen von x sind, für mehr als n verschiedene Werte, so müssen $f(x)$ und $g(x)$ in sämtlichen Vorzahlen übereinstimmen. Denn ohne diese Übereinstimmung ergäbe sich eine Gleichung, deren Wurzelzahl größer wäre als ihr Grad.

4. Sei wieder die Form (9) gegeben und $f(x)$ verschwinde für $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann ist

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

eine identische, für jeden Wert von x bestehende Gleichung. Also ist

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum x_h \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum x_h x_k \\ -a_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots = \sum x_h x_k x_l, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm a_n &= x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen heißen die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln. Sie sind für die Theorie der Gleichungen von äußerster Wichtigkeit.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen machen wir einige Anwendungen für die Gleichungen dritten Grades. Da wir aus der Cardanischen Formel wissen, daß die Gleichungen dritten Grades immer drei Wurzeln haben, ist die Annahme zulässig:

$$(11) \quad \begin{cases} x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \\ -a_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad a_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, \\ \qquad -a_3 = x_1 x_2 x_3. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich sofort die Lösung der Aufgabe, eine Gleichung dritten Grades anzugeben, welche drei vorgeschriebene Wurzeln hat. Aus den Entwicklungen S. 39 ergibt sich, daß man umgekehrt alle rationalen Wurzeln bei einer Gleichung mit ganzzahligen Vorzahlen durch Zerlegung des Gliedes a_3 findet. Um diese Bestimmung auszuführen, schafft man zunächst etwaige Brüche fort und erhält eine Gleichung

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0.$$

Dann setzt man $x = \frac{y}{A_0}$ und findet

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 A_0 y + A_3 A_0^2 = 0.$$

Dann ist die Zahl $A_0^2 A_3$ in ihre Faktoren zu zerlegen und für jeden Teiler die Probe zu machen. Findet sich kein Teiler, welcher der Gleichung genügt, so hat sie sicher keine rationale Wurzel; vgl. S. 39.

Aus (11) ergibt sich:

$$(12) \qquad a_1^2 - 2a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Man kann also die Summe der Quadrate der Wurzeln finden ohne die Gleichung aufzulösen. Diese Bemerkung hat einen weiten Hintergrund. Sie gilt zunächst auch für die Summe der Kuben. Da für $\alpha = 1, 2, 3$ ist:

$$x_\alpha^3 + a_1 x_\alpha^2 + a_2 x_\alpha + a_3 = 0,$$

so folgt durch Addition:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + a_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_2(x_1 + x_2 + x_3) + 3a_3 = 0,$$

oder

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a_1(a_1^2 - 2a_2) + a_1 a_2 - 3a_3,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3.$$

In derselben Weise schließt man weiter und findet, daß auch die Summe der 4ten, 5ten, ..., n^{ten} Potenzen bestimmbar ist. Setzen wir

$$s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n,$$

so folgt aus

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} = 0,$$

$$(13) \qquad s_n = -a_1 s_{n-1} - a_2 s_{n-2} - a_3 s_{n-3}.$$

Hieraus ergibt sich eine vielfach angewandte Methode zur Bestimmung von Näherungswerten der Wurzeln. Sei $(x_1) > (x_2) > (x_3)$, so wird für reelle Wurzeln

$$s_n = (x_1)^n\left(\pm 1 \pm \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n \pm \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^n\right)$$

und deshalb bei wachsendem n

$$s_n = \pm (x_1)^n.$$

Beispiel. $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$

$$s_1 = -1,\quad s_2 = 9,\quad s_3 = -16,\quad s_4 = 53,\quad s_5 = -126,$$

$$s_6 = 354,\quad s_7 = -911,\quad s_8 = 2453,\quad s_9 = -6451,$$

$$s_{10} = 17174,\quad s_{11} = -45431.$$

s_{11} liefert $x = -2{,}6509$, vier Stellen richtig.

Aufgabe. Gegeben die Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3. Man bestimme die Gleichung, deren Wurzeln x_1^2, x_2^2, x_3^2 sind.

1. Lösung. Es ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_1^2 - 2a_2, \quad x_1^2 x_2^2 x_3^2 = a_3^2,$$

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= a_2^2 - 2a_1 a_3.$$

Folglich ist die gesuchte Gleichung:

(14) $$x^3 - (a_1^2 - 2a_2)x^2 + (a_2^2 - 2a_1 a_3)x - a_3^2 = 0.$$

2. Lösung. Wir ersetzen x durch $\sqrt{y}$ und erhalten:

$$y\sqrt{y} + a_2\sqrt{y} = -a_1 y - a_3,$$

also

$$y^3 + 2a_2 y^2 + a_2^2 y = a_1^2 y^2 + 2a_1 a_3 y + a_3^2,$$
$$y^3 - (a_1^2 - 2a_2)y^2 + (a_2^2 - 2a_1 a_3)y - a_3^2 = 0.$$

Das Ergebnis stimmt mit (14).

Aus (2) ergibt sich eine besonders geeignete Methode zur zahlenmäßigen Lösung der Gleichungen und zwar beliebig hohen Grades.

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung, deren Wurzeln sind:

$$x_1 - x_2, \quad x_2 - x_3, \quad x_3 - x_1.$$

Lösung. Die Wurzeln seien α_1, α_2, α_3, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -a_1^2 + 3a_2,$$

(15) $$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 - x_2 x_1^2 - x_3 x_2^2 - x_1 x_3^2.$$

Diese letzte Funktion der Wurzeln ist zweiwertig. Läßt man x_1, x_2, x_3 irgend welche Vertauschungen machen, so bleibt der Ausdruck (15) entweder unverändert oder er ändert lediglich sein Vorzeichen. Nun ist

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = 3x_1 x_2 x_3$$
$$+ x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2.$$

Setzen wir also

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = \beta, \quad x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 = \gamma,$$

so ist

$$\beta + \gamma = -a_1 a_2 + 3a_3.$$

Es ist weiter

$$\beta\gamma = x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + 3x_1^2 x_2^2 x_3^2$$
$$+ x_1 x_2 x_3 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

Wir fanden

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = a_2^2 - 2a_1 a_3 .$$

Multiplizieren wir mit

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = a_2 ,$$

so folgt:

$$x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1 x_2 x_3 (\beta + \gamma) = a_2^3 - 2a_1 a_2 a_3 ,$$

also

$$x_1^3 x_2^3 + x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 = 3a_3^2 + a_2^3 - 3a_1 a_2 a_3 .$$

Endlich ist

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3 .$$

Also

$$\beta\gamma = a_1^3 a_3 - 6a_1 a_2 a_3 + a_2^3 + 9a_3^2$$

$$(\beta - \gamma)^2 = (a_1 a_2 - 3a_3)^2 - 4a_1^3 a_3 + 24a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 - 36a_3^2,$$

$$(\beta - \gamma)^2 = -4a_1^3 a_3 + 18a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 4a_2^3 - 27a_3^2 .$$

Wir haben also das wichtige Ergebnis gefunden:

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = -4a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 + 18a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Folglich ist die Gleichung, deren Wurzeln sind

$$x_1 - x_2, \quad x_2 - x_3, \quad x_3 - x_1 ,$$

die folgende:

$$x^3 + (3a_2 - a_1^2)x + \sqrt{D} = 0.$$

Die Bezeichnung D ist dauernd. Die Berechnung des Produkts der quadrierten Wurzeldifferenzen ist für viele Fragen von entscheidender Bedeutung. Zu der S. 117 eingeführten Größe A hat D die S. 123 gegebene Beziehung:

$$D = -108A.$$

Die vorstehenden Erörterungen haben uns gezeigt, daß symmetrische Funktionen der drei Wurzeln sich durch die Grundfunktionen

$$x_1 + x_2 + x_3 , \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 , \quad x_1 x_2 x_3$$

ausdrücken lassen. Wirklich kann man zeigen, daß jede ganze ganzzahlige symmetrische Funktion der Wurzeln sich durch die drei Grundfunktionen, d. h. durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung ganz und ganzzahlig ausdrücken läßt. Dieser Satz ist auf jede Gleichung n^{ten} Grades übertragbar und spielt in der Lehre von den Gleichungen die wichtigste Rolle.

Die symmetrischen Funktionen der Wurzeln ändern bei beliebiger Vertauschung der Wurzeln ihren Wert nicht. Anders verhielt sich die Funktion $\gamma = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2$, welche bei drei Vertauschungen in sich selbst übergeht, bei drei andern in $\beta = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$.

Sie ist daher **zweiwertig**. Versucht man ihre Darstellung durch die Gleichungskoeffizienten, so findet man:

$$\beta + \gamma = -a_1 a_2 + 3a_3, \quad \beta - \gamma = \sqrt{D}.$$

Man kann β und γ also nicht rational in den Koeffizienten der Gleichung ausdrücken, wohl aber mit Hilfe einer quadratischen Irrationalität. **Dreiwertige** Funktionen der Wurzeln sind $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ usw. Auch x_1 hat drei Werte, nämlich x_1, x_2, x_3, in welche es übergehen kann. **Vierwertige** und **fünfwertige** Funktionen der Wurzeln gibt es nicht. **Sechswertig** ist $ax_1 + bx_2 + cx_3$, wenn a, b, c beliebige ungleiche Zahlen sind. Besonders wichtig ist die Funktion

$$(\varrho, x) = x_1 + \varrho x_2 + \varrho^2 x_3, \quad \varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Es ist

(16) $$(\varrho, x)(\varrho^2, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_1 x_3,$$

also **symmetrisch**. Ferner ist

$$(\varrho, x)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1 x_2 x_3$$
$$+ 3(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1)\varrho + 3(x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2)\varrho^2,$$

$$(\varrho^2, x)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1 x_2 x_3$$
$$+ 3(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1)\varrho^2 + 3(x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2)\varrho.$$

Also

(17) $$(\varrho, x)^3 + (\varrho^2, x)^3 = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 2x_3^3 + 12x_1 x_2 x_3$$
$$- 3(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2).$$

Aus

$$(\varrho, x) \cdot (\varrho^2, x) = a_1^2 - 3a_2,$$
$$(\varrho, x)^3 + (\varrho^2, x)^3 = -2a_1^3 + 9a_1 a_2 - 27a_3$$

ersieht man, daß $(\varrho, x)^3$ eine **zweiwertige** Funktion sein muß, deren Wert leicht bestimmbar ist. Es ergibt sich:

$$(\varrho, x)^3 - (\varrho^2, x)^3 = 3(\varrho - \varrho^2)(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$$
$$- x_1^2 x_3 - x_2^2 x_1 - x_3^2 x_2),$$

also nach (15):

$$(\varrho, x)^3 - (\varrho^2, x)^3 = -3i\sqrt{3}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1),$$

oder

$$(\varrho, x)^3 - (\varrho^2, x)^3 = 3i\sqrt{3} \cdot \sqrt{D},$$

oder

$$((\varrho, x)^3 - (\varrho^2, x)^3)^2 = 27(4a_1^3 a_3 - a_1^2 a_2^2 - 18a_1 a_2 a_3 + 4a_2^3 + 27a_3^2)$$

Folglich

$$(\varrho, x)^3 = \frac{-2a_1^3 + 9a_1 a_2 - 27a_3 + 3i\sqrt{3}\sqrt{D}}{2}.$$

Hiermit hat man nach Ausziehung der Kubikwurzel (ϱ, x) und (ϱ^2, x), folglich auch die Werte für x.

Ist nämlich

$$(\varrho, x) = b_1, \quad (\varrho^2, x) = b_2,$$

$$x_1 + \varrho x^2 + \varrho^2 x_3 = b_1,$$

$$x_1 + \varrho^2 x_2 + \varrho x_3 = b_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1,$$

so folgt:

$$3x_1 = -a_1 + b_1 + b_2,$$

$$3x_2 = -a_1 + \varrho^2 b_1 + \varrho b_2,$$

$$3x_3 = -a_1 + \varrho b_1 + \varrho^2 b_2,$$

Hiermit haben wir eine zweite Methode gewonnen, die kubischen Gleichungen zu lösen. Sie ist weit mehr entwicklungsfähig als die erste. In der Tat braucht sie nur weiter ausgebildet zu werden, um die Lösung höherer Gleichungen zu erhalten, wenn eine solche möglich ist und den Beweis zu liefern, daß es unmöglich ist, Gleichungen fünften und höheren Grades allgemein durch Wurzelausziehung zu lösen.

1. Zahlenbeispiel:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = i, \quad x_4 = -i, \quad D = -16.$$

$$(\varrho, x) = -1 + i(\varrho - \varrho^2) = -1 - \sqrt{3},$$

$$(\varrho, x)^3 = -10 - 6\sqrt{3},$$

$$(\varrho^2, x)^3 = -10 + 6\sqrt{3},$$

$$(\varrho, x)^3 + (\varrho^2, x)^3 = -20,$$

$$(\varrho, x) \cdot (\varrho^2, x) = -2.$$

2. Zahlenbeispiel:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

$$a_1 = -10, \quad a_2 = 31, \quad a_3 = 30.$$

$$\left.\begin{array}{rl} -4a_1^3 a_3 & = -120\,000 \\ -4a_2^3 & = -119\,164 \\ -27a_3 & = -24\,300 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{rl} a_1^2 a_1^2 & = 96\,100 \\ 18a_1 a_2 a_3 & = 167\,400 \end{array}\right\} +$$

$$\; -263\,464 \qquad\qquad 263\,500$$

$$\left.\begin{array}{r} -263\,464 \\ +263\,500 \end{array}\right\} +$$

$$D = 36, \quad \sqrt{D} = 6.$$

$$(\varrho, x)^3 = 10 - 9i\sqrt{3}, \quad (\varrho^2, x)^3 = 10 + 9i\sqrt{3},$$
$$(\varrho, x)(\varrho^2, x) = 7.$$

Die Wurzeln sind

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5.$$

Also

$$(\varrho, x) = -2 - i\sqrt{3},$$
$$(\varrho^2, x) = -2 + i\sqrt{3}.$$

Die Ausrechnung ergibt für $(\varrho, x)^3$ Übereinstimmung mit dem obigen Werte $10 - 9i\sqrt{3}$.

Schreiten wir jetzt zur Lösung der Gleichungen vierten Grades. Die gegebene Gleichung sei:

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0. \tag{18}$$

Nennen wir die Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4, so ist

$$\begin{cases} -a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ a_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4, \\ -a_3 = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2, \\ a_4 = x_1x_2x_3x_4. \end{cases} \tag{19}$$

Die allgemeine ganze Funktion ersten Grades

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$$

erhält 24 Werte, wenn man die x auf alle 24 Arten, die möglich sind, vertauscht. Betrachten wir aber die Wurzelfunktion

$$y = x_1 + x_2,$$

so ergibt sich bei Ausführung der 24 Vertauschungen, daß sie nur sechswertig ist. Die sechs Werte sind:

$$x_1 + x_2, \quad x_2 + x_3, \quad x_3 + x_4, \quad x_4 + x_1, \quad x_2 + x_4, \quad x_3 + x_1.$$

Bildet man das Produkt

$$z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \tag{20}$$

so ergibt sich, daß es nur dreiwertig ist. Aus dieser Bemerkung ergibt sich ein Verfahren, die Gleichungen vierten Grades zu lösen. Denn man kann die Gleichung dritten Grades bilden, deren Wurzeln die drei Werte z sind, welche sich aus (20) durch Vertauschung der x ergeben. Wir können jedoch ein noch einfacheres Verfahren erhalten wie folgt. Aus (20) ergibt sich

$$a_2 = z + x_1x_2 + x_3x_4,$$

daher bilden wir die dreiwertige Funktion:

$$u_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad u_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad u_3 = x_1x_4 + x_2x_3. \tag{21}$$

Dann ist

$$u_1 + u_2 + u_3 = a_2,$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \sum x_\alpha^2 x_\beta^2 + 6a_4,$$

wo $\sum x_\alpha^2 x_\beta^2$ eine kurze Bezeichnung der Summe ist:

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_4^2 + x_4^2x_1^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2.$$

Die Summe erhalten wir, wenn wir die Gleichung bilden, deren Wurzeln die Quadrate x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 sind. Wir setzen $x = \sqrt{y}$, also

$$y^2 + a_1 y\sqrt{y} + a_2 y + a_3\sqrt{y} + a_4 = 0,$$

also

$$(y^2 + a_2 y + a_4)^2 - (a_1 y + a_3)^2 y = 0,$$

oder

(23) $$y^4 + (2a_2 - a_1^2)y^3 + (2a_4 + a_2^2 - 2a_1a_3)y^2 + (2a_2a_4 - a_3^2)y + a_4^2 = 0.$$

Also ist

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 8a_4 + a_2^2 - 2a_1a_3,$$

(22) $$u_1u_2 + u_2u_3 + u_1u_3 = a_1a_3 - 4a_4.$$

Man hätte dies auch durch direkte Multiplikation von a_1a_3 aus (19) finden können. Ferner erhalten wir:

$$u_1u_2 = (x_1^2 + x_4^2)x_2x_3 + (x_2^2 + x_3^2)x_1x_4,$$

daher

$$u_1u_2u_3 = x_1x_2x_3x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + (x_1^2 + x_4^2)x_2^2x_3^2 + (x_2^2 + x_3^2)x_1^2x_4^2.$$

Die Bestandteile können den Vorzahlen der Gleichung (23) entnommen werden. Also

$$u_1u_2u_3 = a_4(a_1^2 - 2a_2) + a_3^2 - 2a_2a_4.$$

Die Gleichung für u ist also:

(24) $$u^3 - a_2u^2 + (a_1a_3 - 4a_4)u - (a_1^2a_4 + a_3^2 - 4a_2a_4) = 0.$$

Der Vollständigkeit wegen wollen wir hieraus die Gleichung für z ableiten. Nach (20) ist

$$z_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = a_2 - u_1.$$

Wir setzen also in (24)

$$z = a_2 - u.$$

Dann wird:

(25) $$z^3 - 2a_2z^2 + (a_2^2 + a_1a_3 - 4a_4)z + a_1^2a_4 + a_3^2 - a_1a_2a_3 = 0.$$

Die Gleichungen (24) und (25) heißen mit Recht Resolventen der Gleichungen vierten Grades. Sei z_1 bestimmt. Dann ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1$$
$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = z_1,$$

also

$$(26) \quad \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4z_1}, \\ 2(x_3 + x_4) = -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4z_1}. \end{cases}$$

Bevor wir die Untersuchung weiter führen, haben wir uns mit den Vorzeichen der Wurzeln in (26) auseinander zu setzen. Zu diesem Zweck betrachten wir die drei Wurzelfunktionen:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$
$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4,$$
$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3.$$

Ihr Produkt ist symmetrisch. Dies könnte zweifelhaft sein, da x_1 in allen positiv vorkommt. Allein man braucht nur das Vorzeichen der zweiten und dritten Zeile gleichzeitig zu ändern, um x_2 in allen positiv zu machen usw. Die Darstellung der gesuchten Wurzelfunktion durch die a machen wir wie folgt. Da sie dritten Grades ist, können nur Ausdrücke dritten Grades vorkommen. Solche Ausdrücke sind nur drei vorhanden, nämlich a_1^3, $a_1 a_2$ und a_3. Wir setzen an:

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)$$
$$= \alpha a_1^3 + \beta a_1 a_2 + \gamma a_3.$$

Hier bedeuten α, β, γ ganze Zahlen, deren Werte wir durch geeignete willkürliche Annahmen bezüglich der x_1, x_2, x_3, x_4 ermitteln können.

Setzen wir

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

so wird

$$a_1 = -x_1, \quad a_2 = a_3 = 0,$$

also

$$x_1^3 = -\alpha x_1^3, \quad \alpha = -1.$$

Für $x_3 = x_4 = 0$ wird

$$a_1 = -x_1 - x_2, \quad a_2 = x_1 x_2, \quad a_3 = 0,$$

also

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2 = +(x_1 + x_2)^3 - \beta(x_1 + x_2)x_1 x_2,$$
$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - \beta x_1 x_2, \quad \text{also} \quad \beta = 4.$$

Endlich setzen wir

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,$$

so wird

$$a_1 = -4, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = -4$$

und

$$0 = 64 - 96 - 4\gamma, \quad \gamma = -8.$$

Also ist

$$(27)\quad (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) = - a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3.$$

Die Ausrechnung bestätigt das Ergebnis.

Hiernach erhalten wir folgende Lösung der Gleichungen 4ten Grades: Die gegebene Gleichung sei:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Wir bilden die Resolvente:

$$z^3 - 2a_2z^2 + (a_2^2 + a_1a_3 - 4a_4)z + a_1^2a_4 + a_3^2 - a_1a_2a_3 = 0.$$

Ihre Wurzeln sind:

$$z_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad z_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad z_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).$$

Wir berechnen:

$$(28)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{a_1^2 - 4z_1}, \\ x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = \sqrt{a_1^2 - 4z_2}, \\ x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = \sqrt{a_1^2 - 4z_3} \end{cases}$$

und nehmen die Vorzeichen von $\sqrt{a_1^2 - 4z_1}$, $\sqrt{a_1^2 - 4z_2}$ willkürlich an, etwa beide positiv. Dann bestimmt man das dritte aus der Gleichung:

$$(28\text{a})\quad \sqrt{a_1^2 - 4z_1}\,\sqrt{a_1^2 - 4z_2}\,\sqrt{a_1^2 - 4z_3} = - a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3$$

und findet nun durch Addition der Gleichungen (28)

$$(29)\quad 4x_1 = - a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4z_1} + \sqrt{a_1^2 - 4z_2} + \sqrt{a_1^2 - 4z_3}.$$

Erstes Beispiel.

$$(30)\quad x^4 + mx^3 + px^2 + mx + 1 = 0.$$

$$a_1 = m, \quad a_2 = p, \quad a_3 = m, \quad a_4 = 1.$$

Die Resolvente wird:

$$(31)\quad z^3 - 2pz^2 + (p^2 + m^2 - 4)z + 2m^2 - m^2p = 0.$$

Durch Zerlegung des Freigliedes findet man eine Wurzel $z_1 = p - 2$ und (31) zerfällt in

$$(z - p + 2)(z^2 - (p + 2)z + m^2) = 0.$$

Um die Übereinstimmung der hieraus folgenden Lösung mit der bekannten Lösung der reziproken Gleichung (30) zu finden, bedienen wir uns der Umformung

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

und erhalten dann aus (29), indem $z_2 + z_3 = p + 2$ und $z_2 z_3 = m^2$ ist:

$$\sqrt{a_1^2 - 4z_2} + \sqrt{a_1^2 - 4z_3} =$$
$$\sqrt{2a_1^2 - 4(z_2 + z_3) + 2\sqrt{a_1^4 - 4a_1^2(z_2 + z_3) + 16 z_2 z_3}},$$

also in unserm Falle:

$$\sqrt{a_1^2 - 4z_2} \pm \sqrt{a_1^2 - 4z_3} = \sqrt{2m^2 - 4p - 8 \pm 2\sqrt{m^4 - 4m^2(p+2) + 16m^2}}.$$

Hiermit stimmt die Lösung der Gl. (30) nach der Methode der reziproken Gleichungen überein. Für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ wird $z_1 = -1$, $z^2 - 3z + 1 = 0$ gefunden und

$$4x_1 = -1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

In diesem Falle ist $\sqrt{a_1^2 - 4z_3}$ mit dem negativen Vorzeichen zu wählen, weil die rechte Seite von (27) negativ ist.

Zweites Beispiel. $x^4 + a_3 x + a_4 = 0$.

Die Resolvente wird

$$z^3 - 4a_4 z + a_3^2 = 0.$$

Ist diese durch die Werte z_1, z_2, z_3 gelöst, so wird

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2i\sqrt{z_1}, \quad \text{usw.}$$
$$4x_1 = 2i\sqrt{z_1} + 2i\sqrt{z_2} + 2i\sqrt{z_3}.$$

Die Lösung führt uns zu folgender neuen Aufgabe:

Gegeben eine Gleichung dritten Grades

(32) $$x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0.$$

Gesucht die Gleichung, deren Wurzeln $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{x_3}$, sind. Angenommen die Lösung sei

(33) $$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0;$$

dann müßte die aus dieser gebildete Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln sind, mit der vorigen identisch sein. Die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Gl. (33) sind, ist aber

$$x^3 + (2a_2 - a_1^2)x^2 + (a_2^2 - 2a_1 a_3)x - a_3^2 = 0.$$

Also

$$2a_2 - a_1^2 = \alpha_1, \quad a_2^2 - 2a_1 a_3 = \alpha_2, \quad -a_3^2 = \alpha_3.$$

Daher wird für a_1 die Gleichung 4ten Grades gefunden:

$$a_1^4 + 2\alpha_1 a_1^2 - 8a_1\sqrt{-\alpha_3} + \alpha_1^2 - 4\alpha_2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich leicht wie folgt:

Sei (32) gegeben. Wir setzen:

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}.$$

Dann wird durch zweimalige Quadrierung gefunden:

$$y^4 + 2\alpha_1 y^2 - 8\sqrt{-\alpha_3}\, y + \alpha_1^2 - 4\alpha_2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich eine neue Methode, die Gleichungen 4ten Grades zu lösen. Sei gegeben (Eulersche Methode Cantor III 555)

(34) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

In diese Form kann jede Gleichung 4ten Grades gesetzt werden. Um sie zu lösen, setzen wir

(35) $$x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3},$$

wo die y Wurzeln der Gleichung sind

$$y^3 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0,$$

deren Vorzahlen wir bestimmen wollen. Aus (35) folgt:

$$x^2 = -\alpha_1 + 2\sqrt{y_1 y_2} + 2\sqrt{y_2 y_3} + 2\sqrt{y_3 y_1}.$$

Daher nach Addition von α_1 und Quadrierung:

$$x^4 + 2\alpha_1 x^2 + \alpha_1^2 = 4\alpha_2 + 8\sqrt{y_1 y_2 y_3}\left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right),$$

$$x^4 + 2\alpha_1 x^2 - 8\sqrt{-\alpha_3}\, x + \alpha_1^2 - 4\alpha_2 = 0.$$

Vergleichen wir die Vorzahlen mit denen von (34), so folgt:

$$\alpha_1 = \frac{p}{2}, \quad \alpha_3 = -\frac{q^2}{64}, \quad \alpha_2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}.$$

Daher wird die Resolvente von (34):

(36) $$\begin{cases} y^3 + \frac{p}{2} y^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right) y - \frac{q^2}{64} = 0, \\ (4y)^3 + 2p \cdot (4y)^2 + (p^2 - 4r) \cdot (4y) - q^2 = 0. \end{cases}$$

Die übrigen Wurzeln ergeben sich aus (35), indem man je zwei Quadratwurzeln negativ nimmt. Dabei bleibt $\sqrt{y_1 y_2 y_3}$ unverändert, wie es gemäß der Entwicklung sein muß.

Drittes Beispiel.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0.$$

Die Resolvente wird:

$$z^3 + 14z^2 + 24z = 0,$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -12.$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 + x_3 - x_2 - x_4 &= 3, \\ x_1 + x_4 - x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$$ Das Produkt der rechten Seiten ist $+21$. Folglich Entscheidung:

Rechts ist $+7$ zu wählen.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +1.$$

$$4x_1 = 12, \quad 4x_2 = -8, \quad 4x_3 = -4, \quad 4x_4 = 4.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

Viertes Beispiel.

$$x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 8x + 5 = 0.$$

Die Resolvente wird

$$z^3 - 18z^2 + 93z - 144 = 0$$

$$z_1 = 3, \quad z^2 - 15z + 48 = 0,$$

also $\sqrt{a_1^2 - 4z_1} = 2$, und das Produkt der ähnlich gebauten Ausdrücke $-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3 = 16$, also:

$$4x_1 = -2 + \sqrt{16 - 4z_2} + \sqrt{16 - 4z_3}$$

oder

$$2x_1 = -1 + \sqrt{4 - z_2} + \sqrt{4 - z_3}$$

oder weil $z_2 + z_3 = 15, \quad z_2 z_3 = 48$

$$2x_1 = -1 + \sqrt{8 - 15 + 2\sqrt{16 - 4 \cdot 15 + 48}},$$

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Die übrigen Werte folgen aus:

$$2x_2 = -1 - \sqrt{4 - z_2} - \sqrt{4 - z_3},$$

$$2x_3 = -3 + \sqrt{4 - z_2} - \sqrt{4 - z_3},$$

$$2x_4 = -3 - \sqrt{4 - z_2} - \sqrt{4 - z_3}.$$

$$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2}.$$

Die Gleichung ist nicht irreduktibel, sondern zerfällt in das Produkt:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 5) = 0.$$

Weil in diesem Falle der Reduzibilität immer etwa $x_1 + x_2$ und $x_3 + x_4$ rational sind, so ist eine Wurzel der Resolvente rational. Sei etwa gegeben $(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + \delta) = 0$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rational, so ist $x_1 + x_2 = -\alpha$, $x_3 + x_4 = -\gamma$, $z = \alpha\gamma$.

Das gleiche Verhalten zeigt eine irreduktible Gleichung vierten Grades, sobald sie auf eine Kette von zwei quadratischen zurückführbar ist. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen. Sei gegeben:

Fünftes Beispiel.

$$x^2 + (4 + \sqrt{5})x + 3 + 2\sqrt{5} = 0.$$

Hieraus entspringt die irreduktible Gleichung:

$$(x^2 + 4x + 3)^2 - 5(x + 2)^2 = 0.$$
$$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 4x - 11 = 0.$$

Die Resolvente ist
$$z^3 - 34z^2 + 365z - 1232 = 0.$$

Sie zerfällt in das Produkt
$$(z - 11)(z^2 - 23z + 112) = 0.$$

In der Tat ist
$$x_1 + x_2 = -(4 + \sqrt{5}), \quad x_3 + x_4 = -(4 - \sqrt{5}),$$

also
$$z_1 = 11 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4).$$

Die Vorzeichen der Wurzelgrößen $\sqrt{a_1^2 - 4z}$ bestimmt im allgemeinen
$$-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3,$$
diese Größe wird hier Null. In der Tat ist $z_2 = 16$, $z_3 = 7$; und für $z = 16$ wird jene Wurzelgröße Null.

Wir erhalten:
$$4x = -8 \pm \sqrt{20} \pm \sqrt{36},$$
$$4x_1 = -2 + 2\sqrt{5}, \quad 4x_2 = -14 + 2\sqrt{5}, \quad 4x_3 = -2 - 2\sqrt{5},$$
$$4x_4 = -14 - 2\sqrt{5}.$$
$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-7 - \sqrt{5}}{2}.$$
$$x_1 + x_4 = -4, \quad x_2 + x_3 = -4,$$
$$x_1 + x_3 = -1, \quad x_2 + x_4 = -7.$$

Sechstes Beispiel.
$$(x^2 + \alpha x + \beta)^2 - D(x + \gamma)^2 = 0.$$

Es ergibt sich
$$\left.\begin{aligned} x^2 + (\alpha + \sqrt{D})x + \beta + \gamma\sqrt{D} = 0, \\ x^2 + (\alpha - \sqrt{D})x + \beta - \gamma\sqrt{D} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Daher
$$x_1 + x_2 = -(\alpha + \sqrt{D}), \quad x_3 + x_4 = -(\alpha - \sqrt{D}),$$
$$z_1 = \alpha^2 - D.$$

Sehen wir nun zu, wie die allgemeine Lösung zu diesem Ergebnis stimmt. Es ist:

$$a_1 = 2\alpha, \quad a_2 = \alpha^2 + 2\beta - D, \quad a_3 = 2\alpha\beta - 2\gamma D, \quad a_4 = \beta^2 - \gamma^2 D.$$

Daher die Resolvente:
$$z^3 - 2(\alpha^2 + 2\beta - D)z^2 + \{(\alpha^2 - D)^2 + 4\beta(\alpha^2 - D)$$
$$+ 4(\alpha^2\beta - \alpha\gamma D + \gamma^2 D)\}\, z - 4(\alpha^2 - D)(\alpha^2\beta - \alpha\gamma D + \gamma^2 D) = 0.$$

Diese zerfällt sofort in das Produkt:

$$(z - \alpha^2 + D)\{z^2 - (4\beta + \alpha^2 - D)z + 4(\alpha^2\beta - \alpha\gamma D + \gamma^2 D)\} = 0.$$

Hiermit ist bestätigt, daß die Resolvente eine rationale Wurzel, nämlich $z = \alpha^2 - D$ hat, wenn die Gleichung 4ten Grades durch eine Kette quadratischer Gleichungen lösbar ist. Im übrigen ist

$$z_2 + z_3 = 4\beta + \alpha^2 - D, \quad z_2 z_3 = 4\alpha^2\beta - 4\alpha\gamma D + 4\gamma^2 D.$$

Der Vorzeichenbestimmer Gl. (27) wird

$$8D(2\gamma - \alpha) = -a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3.$$

Ferner

$$\sqrt{a_1^2 - 4z_2} = 2\sqrt{\alpha^2 - z_2},$$

daher

$$\sqrt{\alpha^2 - z_2} + \sqrt{\alpha^2 - z_3} = \sqrt{\{2\alpha^2 - 4\beta - \alpha^2 + D + 2\sqrt{(\alpha^4 - 4\alpha^2\beta - \alpha^4 + \alpha^2 D + 4\alpha^2\beta - 4\alpha\gamma D + 4\gamma^2 D)}\}}$$

$$\sqrt{\alpha^2 - z_2} + \sqrt{\alpha^2 - z_3} = \sqrt{\{\alpha^2 - 4\beta + D + 2\sqrt{(\alpha^2 D - 4\alpha\gamma D + 4\gamma^2 D)}\}}$$
$$= \sqrt{\{\alpha^2 - 4\beta + D + 2(\alpha - 2\gamma)\sqrt{D}\}}.$$

Die hieraus folgende Bestimmung von x ergibt sich auch bei Lösung der quadratischen Gleichungen, in welche wir die ursprüngliche Gleichung zerlegt haben. Ist $\alpha = 2\gamma$, so wird (das vorige Beispiel) eine besonders einfache Lösung erhalten.

Siebentes Beispiel.

$$x = a + \sqrt{b} + \sqrt{c},$$

wo a, b, c reelle Zahlen sind. Man findet

$$x^2 - 2ax + a^2 - b - c = 2\sqrt{bc},$$

daher:

$$x^4 - 4ax^3 + (6a^2 - 2b - 2c)x^2 - 4a(a^2 - b - c)x$$
$$+ a^4 - 2a^2(b + c) + (b - c)^2 = 0.$$

Ersetzt man $x - a$ durch y, so erhält man die Gleichung

$$y^4 - 2(b + c)y^2 + (b - c)^2 = 0.$$

Das 5. Beispiel ist wieder ein besonderer Fall des 7ten.

Wenden wir uns jetzt noch einigen theoretischen Betrachtungen zu.

Man erhält aus der Gleichung des 6. Beispiels vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten α, β, γ, D aus den gegebenen Vorzahlen a_1, a_2, a_3, a_4. Es ist $\alpha = \frac{a_1}{2}$ und für die übrigen kann man Gleichungen gewinnen und lösen, welche zum Teil auf Gleichungen dritten Grades, also auf Resolventen führen. Wir wollen das Ergebnis hier nach einer einfacheren Methode zusammenstellen.

Sei gegeben die Gleichung

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Wir suchen sie auf eine andere Form zu bringen, welche eine Faktorenzerlegung sofort gestattet und setzen sie identisch mit

$$(x^2 + \alpha x + \beta)^2 - D(x + \gamma)^2 = 0.$$

Diese zerfällt in die beiden quadratischen

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + (\alpha + \sqrt{D})x + \beta + \gamma\sqrt{D} = 0 \\ x^2 + (\alpha - \sqrt{D})x + \beta - \gamma\sqrt{D} = 0 \end{array}\right\}.$$

Nehmen wir an, der ersteren Gleichung genügen die Wurzeln x_1, x_2, der letzteren x_3, x_4. Dann ist:

$$x_1 + x_2 = -\alpha - \sqrt{D}, \quad x_3 + x_4 = -\alpha + \sqrt{D},$$

$$x_1 x_2 = \beta + \gamma\sqrt{D}, \qquad x_3 x_4 = \beta - \gamma\sqrt{D}.$$

Daher ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2\alpha = -a_1,$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \alpha^2 - D,$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 2\beta.$$

Da (20) $D = \alpha^2 - z = \frac{a_1^{\,2}}{4} - z$ und (21) $2\beta = u$ ist, so erhalten wir für D und β aus (25) und (24) die gesuchten Gleichungen dritten Grades, welche auch die Elimination in mühsamer Entwicklung liefert.

Ferner ist

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2\sqrt{D},$$

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 2\gamma\sqrt{D}.$$

Für $\sqrt{D}$ und $\gamma\sqrt{D}$ erhält man, da sie sechswertige Wurzelfunktionen sind, Gleichungen 6ten Grades. Indes kommen darin nur die geraden Potenzen vor, und eine Lösung ist daher möglich. Für γ wird gefunden:

$$-\gamma = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Wir setzen endlich $y = x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4$. Dann können wir y als Lagrangesche Resolvente bezeichnen. y ist 24-wertig, y^4 aber nur 6-wertig, wie sich ergibt, wenn man y mit den Potenzen von i multipliziert, wobei y^4 unverändert bleibt. Es bleiben also nur sechs Werte von y, die man als wesentlich verschieden aufstellen kann, da auch ihre 4ten Potenzen verschieden sind. Wir stellen sie hier zusammen:

$$y_1 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4,$$
$$y_2 = x_1 + ix_2 - x_4 - ix_3,$$
$$y_3 = x_1 + ix_3 - x_2 - ix_4,$$
$$y_4 = x_1 + ix_3 - x_4 - ix_2,$$
$$y_5 = x_1 + ix_4 - x_2 - ix_3,$$
$$y_6 = x_1 + ix_4 - x_3 - ix_2.$$

Nun findet sich

$$y_1 y_6 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2,$$
$$y_2 y_4 = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2,$$
$$y_3 y_5 = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2.$$

Die Entwicklung ergibt:

$$y_1 y_6 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_4,$$
$$y_1 y_6 = a_1^2 - 2a_2 - 2u_2.$$

Anderseits ist

$$y_1 + y_6 = 2(x_1 - x_3),$$
$$y_1 - y_6 = 2i(x_2 - x_4),$$
$$y_1^2 - y_6^2 = 4i(x_1 x_2 + x_3 x_4 - x_1 x_4 - x_2 x_3).$$

Also:

$$y_1^2 - y_6^2 = 4i(u_1 - u_3); \quad y_1 y_6 = a_1^2 - 2a_2 - 2u_2.$$

Hieraus ergibt sich eine Methode, die y zu bestimmen. Im wesentlichen kommt man auf die Resolvente für u zurück.

Wir wollen jetzt noch folgende Wurzelfunktion untersuchen:

$$v = x_1 + x_2 - x_3 - x_4.$$

Sie ist sechswertig, während ihr Quadrat nur dreiwertig ist. Wir setzen:

$$v_1 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \quad v_2 = x_1 + x_3 - x_2 - x_4,$$
$$v_3 = x_1 + x_4 - x_2 - x_3.$$

Dann ist

$$v_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4),$$

daher

$$v_1^2 = a_1^2 - 2a_2 - 2z_1,$$

oder

$$v^2 = a_1^2 - 4a_2 + 2u.$$

Hieraus können wir die Resolvente in v erhalten, wenn wir in (24) die Einsetzung machen:

$$2u = a_1^2 - 4u_2 - v^2.$$

Wir wenden uns jetzt zu einigen allgemeineren Aufgaben aus der Theorie der Gleichungen.

1. Jede Gleichung n^{ten} Grades hat n Wurzeln. Diese Wurzeln sind entweder reell oder von der Form $a + bi$, wo a und b reell sind.

Dieser Satz ist von größter Bedeutung auf dem Gebiete der Algebra. Denn er lehrt, daß jede Aufgabe der Algebra lösbar ist, wenn die komplexen Zahlen eingeführt sind. Der erste einwandfreie Beweis dieses Satzes wurde von Gauß geführt. Wir verweisen auf die Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber und Wellstein I, § 66.

2. Eine Gleichung n^{ten} Grades kann nur dann durch eine Kette von quadratischen gelöst werden, wenn ihr Grad von der Form ist 2^n. Der Beweis ist sehr einfach. Die algebraischen Ausdrücke, zu denen man geführt wird, sind von der Form $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ oder bestehen aus solchen Ausdrücken, die addiert, subtrahiert, multipliziert oder aus denen weitere Quadratwurzeln gezogen werden. Die Wegschaffung dieser Wurzeln führt aber, wie sich zeigen läßt, nur auf Gleichungen 2ten, 4ten, 8ten, 16ten usw. Grades. Vgl. Klein-Tägert, Aufgaben aus der Elementarmathematik und das vorhin angeführte Werk von Weber und Wellstein I, § 14, 15.

3. Gleichungen fünften und höheren Grades sind allgemein durch Ausziehung von Wurzeln nicht lösbar. Auch hier muß auf die obige Enzyklopädie, I, § 101, verwiesen werden.

Aufgabe. Die Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung sollen bestimmt werden ohne Auflösung der Gleichung.

Lösung. Wir bezeichnen die Gleichung wie gewöhnlich:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Sei $f(x)$ eine ganze Funktion von x. Wir entwickeln

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \frac{1}{3!} h^3 f'''(x) + \cdots$$

und nennen den Koeffizienten $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$, $f''(x)$ die zweite Ableitung usw. Sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

so ist

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.$$

Sei nun

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

Dann ist

$$f(x+h) = (x + h - x_1)(x + h - x_2) \ldots (x + h - x_n).$$

Entwickeln wir nach Potenzen von h, so wird der Koeffizient von h mit $f'(x)$ identisch, also:

$$f'(x) = (x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)\dots(x - x_n) + \cdots,$$

oder:

(37) $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{x - x_\alpha} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_\alpha}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{x_\alpha}{x^2} + \frac{x_\alpha^2}{x^3} + \frac{x_\alpha^3}{x^4} + \cdots.$$

Daher wird

(38) $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \cdots,$$

wo

$$s_m = x_1^m + x_2^m + x_3^m + \cdots + x_n^m.$$

Diese Reihenentwicklung ist immer konvergent, wenn x einen größeren Wert hat als der größte a. B. der Wurzeln. Wir können nunmehr ganz allgemein die Aufgabe lösen:

Die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung soll bestimmt werden ohne Auflösung der Gleichung.

Aus (38) folgt die identische Gleichung:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + (n-3)a_3x^{n-4} + \cdots$$
$$= (x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n)\left(\frac{n}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots\right).$$

Also durch Koeffizientenvergleichung:

$$s_1 + na_1 = (n-1)a_1,$$
$$s_2 + a_1s_1 + na_2 = (n-2)a_2,$$
$$s_3 + a_1s_2 + a_2s_1 + na_3 = (n-3)a_3,$$
$$s_4 + a_1s_3 + a_2s_2 + a_3s_1 + na_4 = (n-4)a_4,$$

daraus folgt:

(39) $$\begin{cases} s_1 = -a_1, \quad s_2 = a_1^2 - 2a_2, \quad s_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3, \\ s_4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4, \\ s_5 = -a_1^5 + 5a_1^3a_2 - 5a_1^2a_3 - 5a_1a_2^2 + 5a_1a_4 + 5a_2a_3 - 5a_5. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke können umgekehrt werden, indem man die a durch die s ausdrückt. Man findet:

(40) $$\begin{cases} a_1 = -s_1, \quad 2a_2 = s_1^2 - s_2, \quad 6a_3 = -s_1^3 + 3s_1s_2 - 2s_3, \\ 24a_4 = s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4, \\ 120a_5 = -s_1^5 + 10s_1^3s_2 - 20s_1^2s_3 - 15s_1s_2^2 + 30s_1s_4 \\ \qquad\qquad + 20s_2s_3 - 24s_5. \end{cases}$$

Zur Probe setzen wir

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1,$$

so wird

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = n,$$

$$a_1 = -n, \quad a_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad a_3 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},$$

daher:

$$n(n-1) = n^2 - n, \qquad n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n,$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n,$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + 24n.$$

Setzt man diese Werte in (39) und (40) ein, so erhält man Übereinstimmung. Ebenso für

$$x_3 = x_4 = \cdots = 0,$$

wird

$$a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Nimmt man nun $x_1 = -x_2$, so wird

$$s_1 = s_3 = s_5 = 0, \quad s_2 = 2x_1^2, \quad s_4 = 2x_1^4.$$

Für $x_1 = 1$, $x_2 = i$ wird

$$s_2 = 0, \quad s_1 = 1 + i, \quad s_3 = 1 - i, \quad s_4 = 2, \quad s_5 = 1 + i.$$

Auch diese Probe stimmt. Setzt man endlich

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \varrho, \quad x_3 = \varrho^2,$$

wo $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$, so kann man $s_1 = s_2 = s_5 = 0$ machen, $s_3 = 3$ usw.

Aufgabe. Gegeben die Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Gesucht der Wert des Ausdrucks

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) = \sqrt{\Delta}.$$

Dieser Ausdruck ist zweiwertig. Wenn wir ihn ins Quadrat erheben, wird er symmetrisch, also durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 ausdrückbar. Es ist (21)

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = x_1 x_3 + x_2 x_4 - x_1 x_4 - x_2 x_3 = u_2 - u_3,$$

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = u_1 - u_3, \quad (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = u_1 - u_2.$$

Folglich ist

$$\Delta = (u_1 - u_2)^2 (u_1 - u_3)^2 (u_2 - u_3)^2.$$

Die Gleichung für u haben wir bereits gebildet [Gl. (24), S. 131]. Setzen wir für einen Augenblick

$$u = \tfrac{1}{3}a_2 + v,$$

so wird

$$v^3 + \tfrac{1}{3}v(-a_2^2 + 3a_1a_3 - 12a_4)$$
$$+ \tfrac{1}{27}(-2a_2^3 + 9a_1a_2a_3 + 72a_2a_4 - 27a_1^2a_4 - 27a_3^2) = 0.$$

Da nun für diese Gleichung die Diskriminante sehr einfach ist, erhält man:

$$(41)\quad \begin{aligned} 27\Delta = 4(a_2^2 + 12a_4 - 3a_1a_3)^3 - (2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 - 72a_2a_4 \\ + 27a_1^2a_4 + 27a_3^2)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe. Gegeben die Gleichung vierten Grades

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Man bestimme die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln sind:

$$x_1x_2,\quad x_1x_3,\quad x_1x_4,\quad x_2x_3,\quad x_2x_4,\quad x_3x_4.$$

Es ist leicht, die Potenzsummen zu bestimmen. Sei

$$S_\alpha = x_1^\alpha x_2^\alpha + x_1^\alpha x_3^\alpha + \cdots + x_3^\alpha x_4^\alpha,$$

dann ist:

$$2S_\alpha = (x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha + x_4^\alpha)^2 - x_1^{2\alpha} - x_2^{2\alpha} - x_3^{2\alpha} - x_4^{2\alpha}.$$

Setzen wir also:

$$s_\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha + x_4^\alpha,$$

so ist

$$2S_\alpha = s_\alpha^2 - s_{2\alpha}.$$

Nun ist

$$s_1 = -a_1,\quad s_2 = a_1^2 - 2a_2,\quad s_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3,$$

also

$$S_1 = a_2,\quad S_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4 \quad \text{usw.};$$

folglich

$$A_1 = -a_2,\quad A_2 = a_1a_3 - a_4 \quad \text{usw.}$$

Die Lösung ist

$$x^6 - a_2x^5 + (a_1a_3 - a_4)x^4 - (a_1^2a_4 - 2a_2a_4 + a_3^2)x^3$$
$$+ a_4(a_1a_3 - a_4)x^2 - a_4^2a_2x + a_4^3 = 0.$$

Die Gleichung ist nach Art der reziproken lösbar und führt mithin zu einer neuen Lösungsmethode der Gleichungen vierten Grades.

§ 27. Lösung der Gleichungen durch Näherung.

1. Methode von Graeffe. Dem Hauptgedanken nach ist diese Methode schon S. 125 entwickelt. Sie wird gewöhnlich in der Weise gelehrt, daß man die Potenzsummen s_1, s_2, s_4, s_8, s_{16} usw. ableitet. Aus der Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

erhält man

$$x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \cdots = -(a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} + \cdots),$$

also nach Quadrierung und Ordnung:

$$x^{2n} + (2a_2 - a_1^2) x^{2n-2} + (2a_4 + a_2^2 - 2a_1 a_3) x^{2n-4}$$
$$+ (2a_6 + 2a_2 a_4 - 2a_1 a_5 - a_3^2) x^{2n-6} + \cdots \pm a_n^2 = 0.$$

Ersetzt man nun x^2 durch den Buchstaben x, so hat man eine Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der ursprünglichen sind. Die früher behandelte Gleichung liefert folgende Umformungen:

1)	$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0,$	Wurzeln	$x_1, \; x_2, \; x_3;$
2)	$x^3 - 9x^2 + 14x - 1 = 0,$	"	$x_1^2, \; x_2^2, \; x_3^2;$
3)	$x^3 - 53x^2 + 178x - 1 = 0,$	"	$x_1^4, \; x_2^4, \; x_3^4;$
4)	$x^3 - 2453x^2 + 31578x - 1 = 0,$	"	$x_1^8, \; x_2^8, \; x_3^8;$
5)	$x^3 - 5954053x^2 + 997165178x - 1 = 0,$	"	$x_1^{16}, \; x_2^{16}, \; x_3^{16}.$

Hieraus folgt

$$x_1^{16} = 5954053, \quad x_1 = \pm 2{,}651099.$$

Das Vorzeichen von x_1 wird am besten durch Probieren bestimmt. Die Methode liefert auch für x_2 sofort einen Näherungswert. Denn wenn die Kette der Gleichungen hinreichend weit geführt ist, so haben wir die annähernd richtigen Bestimmungen:

$$(1) \qquad x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - A_3 x^{n-3} + \cdots \pm A_n = 0,$$

$$x_1^p \sim A_1, \quad x_1^p x_2^p \sim A_2, \quad x_1^p x_2^p x_3^p \sim A_3,$$

also

$$x_1 \sim \sqrt[p]{A_1}, \quad x_2 \sim \sqrt[p]{\frac{A_2}{A_1}}, \quad x_3 \sim \sqrt[p]{\frac{A_3}{A_2}}, \quad \text{usw.}$$

Hierbei ist (1) die transformierte Gleichung, deren Wurzeln die p^{ten} Potenzen der ursprünglichen sind.

Für unser Beispiel ergibt sich

$$x_1 = -2{,}651099, \quad x_2 = 1{,}376334, \quad x_3 = 0{,}2740631.$$

x_1 ist annähernd richtig, x_2 und x_3 nur für die ersten vier Stellen.

Die Graeffesche Methode hat große Vorzüge vor allen übrigen.

1) Sie bedarf nicht besonderer Anstalten, um die Wurzeln der Gleichung zu trennen und führt daher auch zum Ziel, wenn die beiden größten Wurzeln einander nahe liegen.

2) Sie liefert alle Wurzeln mit einem Schlage.

3) Sie ist auf den Fall komplexer Wurzeln ausdehnbar.

Wir wollen den Fall komplexer Wurzeln an einem Beispiel studieren. Sei gegeben

$$1) \quad x^3 + 5x^2 + 7x - 12 = 0.$$

Die transformierten werden:

2) $x^3 - 11x^2 + 169x - 144 = 0,$ Wurzeln $x_1^2, x_2^2, x_3^2,$

3) $x^3 + 217x^2 + 25393x - 20736 = 0,$ " $x_1^4, x_2^4, x_3^4,$

4) $x^3 + 3697x^2 + 653803873x - 20736^2 = 0,$ " $x_1^8, x_2^8, x_3^8.$

Sei

$$x_1 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad x_2 = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Da

$$x_1 x_2 x_3 = \varrho^2 \cdot x_3 = 12 \quad \text{und} \quad x_3 \sim 1$$

ist, so folgt

$$\varrho > x_3.$$

Also wird

$$x_1^8 x_2^8 + x_1^8 x_3^8 + x_2^8 x_3^8 \sim x_1^8 x_2^8 \sim \varrho^{16}.$$

Wir haben also annähernd

$$\varrho^{16} = 653803873,$$

also

$$\log\varrho = 0{,}5509655, \quad \varrho = 3{,}556030.$$

Ferner ist

$$\left.\begin{array}{r} \log 12 = 1{,}0791812 \\ 2\log\varrho = 1{,}1019310 \end{array}\right\}$$

$$\log x_3 = 0{,}9772502 - 1$$

$$x_3 = 0{,}9489650.$$

Probe:

$$3\log x_3 = 0{,}9317506 - 1, \quad x_3^3 = 0{,}8545760,$$

$$2\log x_3 = 0{,}9545004 - 1, \quad x_3^2 = 0{,}9005343.$$

Die Probe stimmt mit einer Ungenauigkeit von 25 der 7ten Dezimale. Da

$$2\varrho\cos\varphi + x_3 = -5,$$

so ergibt sich

$$\varrho\cos\varphi = -2{,}9744825.$$

Man findet

$$\varphi = 146^0\, 46'\, 5''\, 94 \quad \text{und} \quad \varrho\sin\varphi = 1{,}948796.$$

Daher

$$x_1 = -2{,}974482 + i \cdot 1{,}948796.$$

Als letztes Beispiel wählen wir die Gleichung vierten Grades mit vier komplexen Wurzeln:

1) $x^4 - 4x^3 + 23x^2 - 38x + 34 = 0,$ Wurzeln $x_1, x_2, x_3, x_4.$

Wir erhalten die Umformungen:

2) $x^4 + 30x^3 + 293x^2 + 120x + 1156 = 0,$

Wurzeln $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2.$

3) $x^4 - 314x^3 + 80961x^2 + 663016x + 1336336 = 0,$

Wurzeln $x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4$.

Diese Gleichung hat eine Wurzel $x = -4$, was aber nur der Probe wegen erwähnt sein mag.

Bei nochmaliger Entwicklung wird der Koeffizient von x^2, auf den es allein ankommt,

$$6973730241.$$

Sein Logarithmus ist 9,8434652, woraus die 16[te] Wurzel den Wert $\varrho = 4{,}123030$ ergibt. Genauer ist $\varrho = 4{,}123105$. Möge der absolute Betrag der Wurzeln x_1, x_2 mit ϱ_1, der von x_3 und x_4 mit ϱ_2 bezeichnet werden. Es findet sich $\varrho_1^2\varrho_2^2 = 34$, also aus dem für ϱ_1 gefundenen Werte $\varrho_1 = \sqrt{17}$ folgt $\varrho_2 = \sqrt{2}$. Nun ist das Argument leicht zu bestimmen. Sei

$$x_1 = \varrho_1 e^{\varphi_1 i}, \quad x_3 = \varrho_2 e^{\varphi_2 i},$$

so ist

$$314 \sim 2\varrho_1^4 \cdot \cos 4\varphi_1$$

und

$$-663016 \sim 2\varrho_1^8 \cdot \varrho_2^4 \cos 4\varphi_2.$$

In Wirklichkeit ist beides ziemlich zutreffend. Denn

$$\varrho_1^4 \cdot \cos 4\varphi_1 = 161 \quad \text{und} \quad \varrho_1^8 = 83521, \quad \varrho_2^4 \cdot \cos 4\varphi_2 = -4.$$

2. Methode von Newton. Wir setzen

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Dann haben wir die Entwicklung:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \cdots, \tag{1}$$

welche für jeden Wert von x und h gültig ist. Nehmen wir an, es sei $f(x)$ ein von Null nicht sehr verschiedener Wert, etwa $f(x) < 0{,}1$. Um dann $f(x+h) = 0$ zu erhalten, setzen wir $f(x) + h \cdot f'(x) = 0$ und finden:

$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Diesen Wert benutzen wir zur Verbesserung von x, erhalten also als neues x

$$x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}.$$

Die Fortsetzung dieser Berechnungsmethode ergibt die gesuchte Lösung mit jeder beliebigen Genauigkeit.

Die Voraussetzungen der Anwendbarkeit unserer Methode sind folgende:

1) Die mit h^2, h^3 usw. multiplizierten Teile der Reihe (1) müssen klein genug sein.

2) Der Nenner $f'(x)$ darf nicht verschwinden.

Die Bedingungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ weisen auf eine doppelte Wurzel hin, wie die Betrachtung des Ausdrucks $f(x) = (x - \alpha)^n \cdot g(x)$ für $x = \alpha$ zeigt. Doppelte und (mehrfache) Wurzeln können immer durch ein aus nur rationalen Operationen bestehendes Verfahren entfernt werden. Man braucht nur den gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$ aufzusuchen. Sind die mehrfachen Wurzeln entfernt, so kann $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ nicht gleichzeitig erfüllt sein.

Beide Bedingungen können erfüllt werden. Denn $f(x)$ ist eine stetige Funktion und hat immer n Nullstellen, an welchen die Ableitung nicht verschwindet.

Die Aufsuchung gemeinsamer Faktoren von ganzen Funktionen geschieht nach ähnlicher Methode wie bei ganzen Zahlen. Sei

$$P = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$
$$Q = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$m > n.$$

Wir bilden

$$A = x^{m-n} + \alpha_1 x^{m-n-1} + \cdots + \alpha_{m-n},$$

und das Produkt

$$AQ.$$

Dann kann man in

$$P - AQ = R$$

durch passende Wahl der $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-n}$ alle mit x^{m-1} bis x^{m-n} multiplizierten Glieder zum verschwinden bringen. Ein gemeinsamer Teiler von P und Q steckt nun auch in Q und R. Damit ist die Aufgabe auf eine einfachere zurückgeführt. Vgl. § 13, S. 34.

Auch folgende Ableitung ergibt sich für jede ganze Funktion. Wir setzen:

$$x = a, \quad h = x - a,$$

so wird

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \cdots;$$

ebenso

$$f(x) = f(b) + (x - b) f'(b) + \cdots.$$

Ersetzt man x durch a, so folgt aus der zweiten

$$f(a) - f(b) = (a - b) f'(b).$$

Entsprechend folgt aus der ersten für $x = b$

$$f(a) - f(b) = (a - b) f'(a),$$

also

$$f'(a) = f'(b).$$

Soll also $f(x) = 0$ werden, so muß sein

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = -x + a, \quad \frac{f(b)}{f'(b)} = -x + b,$$

also

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{f(a)}{f(b)}, \quad x = \frac{b f(a) - a f(b)}{f(a) - f(b)}.$$

Dies ist die Methode des „falschen Ansatzes“ (regula falsi), welche besonders dann mit Vorteil angewandt wird, wenn $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ersetzt man $f(b)$ durch $f(a) + (b-a)f'(a)$, so geht unsere Methode in die Newtonsche über. Die Newtonsche Methode wie auch die vom falschen Ansatz können auf transzendente Gleichungen angewandt werden. Als Beispiel wählen wir die der Kreisteilung entstammende:

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$\begin{array}{ll}
x = 2, & 8 + 4 - 8 + 1 = 5, \\
 & \leftarrow \\
x = 1, & 1 + 1 - 4 + 1 = -1, \\
 & \leftarrow \\
x = 0, & +1 = +1, \\
x = -1, & -1 + 1 + 4 + 1 = +5, \\
x = -2, & -8 + 4 + 8 + 1 = +5, \\
 & \leftarrow \\
x = -3, & -27 + 9 + 12 + 1 = -5.
\end{array}$$

Wie die Zeichenwechsel beweisen, sind drei reelle Wurzeln vorhanden und liegen an den durch die Pfeile bezeichneten Stellen.

Setzen wir $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ und $a = 2$, $b = 1$, so ergibt die regula falsi $x = \frac{7}{6}$.

Durch Probieren finden wir, daß x zwischen 1,3 und 1,4 liegt. Wir setzen $x = 1{,}4 + h$ und finden:

$$0{,}104 + 4{,}68h + 0, \quad h = -0{,}022.$$

Also wird ein neuer Näherungswert

$$x = 1{,}378 + h.$$

Man erhält:

$$0{,}003548 + 4{,}452652 \cdot h = 0, \quad h = -0{,}0007968.$$

Also wird der folgende Näherungswert

$$x = 1{,}3772032 + h.$$

Die Genauigkeit erreicht nahezu die Grenzen der siebenstelligen Tafel.

Unter den vielen sonstigen Methoden zur numerischen Lösung der Gleichungen möge zum Schluß noch die folgende erwähnt werden.

Sei gegeben eine Gleichung $f(x) = 0$ und zwischen den ganzzahligen Werten $x = n$ und $x = n + 1$ liege eine Wurzel. Wir setzen $x = n + y$ und formen dann die Gleichung um. Es entsteht eine Gleichung in y, welche einen Wert nahe an Null besitzt. Sie laute, indem wir nun wieder den Buchstaben x verwenden:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Wir multiplizieren nun der Reihe nach mit x, x^2, x^3 usw. und ersetzen die höheren Potenzen durch x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x. Dann folgt:

$$x^n = -a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} - \cdots - a_n,$$

$$x^{n+1} = (a_1^2 - a_2) x^{n-1} + (a_1 a_2 - a_3) x^{n-2} + (a_1 a_3 - a_4) x^{n-3} + \cdots$$

. . . .

Da $x < 1$, so werden die linken Seiten immer kleiner. Endlich fassen wir von der m^{ten} Potenz an die Gleichungen für x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, ..., x^{m+n-2} als eine Gesamtheit von $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten auf, die wir nach irgend einer Methode lösen. Zur Gewinnung eines Näherungswertes für x setzen wir dann $x^m = x^{m+1} = \cdots = x^{m+n-2} = 0$ und können diesen so gewonnenen Wert verfeinern, indem mit Hülfe der Logarithmentafel aus ihm x^m, x^{m+1} usw. bestimmt werden. Die Methode führt in vielen Fällen zum Ziel und gibt große Genauigkeit. Sind die Vorzahlen von x^m, x^{m+1} usw. im Endausdruck groß, die Vorzahl von x klein, so versagt sie den Dienst. Dies trifft z. B. für die Gleichung zu

$$x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0,$$

in welcher man erhält:

$$1340x^7 + 367x^8 = 105x - 38.$$

Doch kann man durch Einsetzung auf der linken Seite des Wertes 0,3772032, welcher aus der Gleichung $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ folgt, die Lösung in 0,3772026 verbessern.

Vgl. zu diesem Abschnitt C. Runge, Praxis der Gleichungen, Samml. Schubert. Leipzig 1900. C. J. Goeschen.

§ 28. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mathematische Wahrscheinlichkeit ist ein Bruch, dessen Zähler die Anzahl der für ein gewisses Ereignis günstigen, dessen Nenner für dasselbe Ereignis die Anzahl der möglichen Fälle ist. Für die überwiegende Menge aller Aufgaben, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet, gilt folgende Versinnlichung. Eine Urne enthalte eine Anzahl gleicher, nur durch die Farbe verschiedener Kugeln. Jemand zieht blindlings eine Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel von einer bestimmten Farbe (weiß) zu ziehen? An-

genommen, in der Urne befinden sich g weiße, und die Gesamtzahl aller Kugeln in der Urne sei m. Dann ist die Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{g}{m}. \tag{1}$$

Hierzu machen wir folgende Bemerkungen:

1. Wenn sämtliche Kugeln weiß sind, so ist $g = m$. Hieraus folgt $W = 1$. In diesem Fall ist das Ereignis gewiß. Hat die Wahrscheinlichkeit den Wert Eins, so geht sie in Gewißheit über.

2. Die Anzahl der nichtweißen Kugeln ist $m - g$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das betrachtete Ereignis nicht eintritt, heißt entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Bezeichnen wir sie mit W', so ist $W' = \frac{m-g}{m} = 1 - W$.

Es ist also

$$W + W' = 1. \tag{2}$$

Dieser für unser Beispiel abgeleitete Satz gilt allgemein. Werden zwei Ereignisse betrachtet, deren Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 gegeben sind, so kann gefragt werden:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das eine und das andere Ereignis eintritt? (Undfrage.)

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das eine oder das andere Ereignis eintritt? (Oderfrage.)

Der Undfrage geben wir folgende scharfe Fassung. Zwei Urnen enthalten die eine unter a Kugeln b weiße, die andere unter a_1 Kugeln b_1 weiße. Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zwei gezogenen Kugeln weiß sind?

Die Lösung ist folgende. Zu jeder Kugel der ersten Urne kann je eine Kugel der andern Urne gezogen werden. Es ist daher die Anzahl der verschiedenen möglichen Ziehungen $a a_1$. Aus gleichem Grunde ist die Anzahl der günstigen Ziehungen (weiß zu weiß) $b b_1$. Daher die Wahrscheinlichkeit einer günstigen Ziehung, wenn $w = \frac{b}{a}$, $w_1 = \frac{b_1}{a_1}$,

$$W_2 = w \cdot w_1. \tag{3}$$

Bei der Oderfrage gehen wir von der gleichen Voraussetzung aus wie bei der Undfrage. Sie lautet dann: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine der gezogenen Kugeln weiß ist?

Die Lösung ist folgende. Ungünstig ist nur eine Ziehung, bei welcher keine der gezogenen Kugeln weiß ist. Solcher Ziehungen gibt es $(a - b)(a_1 - b_1)$. Subtrahiert man diese Zahl von der An-

zahl der möglichen, so bleibt die Zahl der günstigen Ziehungen. Sie ist also $ab_1 + ba_1 - bb_1$. Daher nach Division durch ab wird

(4) $$W_3 = w + w_1 - ww_1.$$

Indes ist bei der Oderfrage auch nachstehende Möglichkeit gegeben. In einer Urne befinden sich a weiße, b rote, c blaue usw. Kugeln. Die Gesamtzahl ist m. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße oder eine rote zu ziehen?

Die Anzahl der günstigen Fälle ist $a + b$, die der möglichen m. Ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, $w = \frac{a}{m}$, eine rote zu ziehen, $w_1 = \frac{b}{m}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße oder eine rote zu ziehen, $w + w_1$.

(5) $$W_4 = w + w_1.$$

Bei der Oderfrage muß also unterschieden werden. Es kann gefragt werden nach dem Zusammentreffen von zwei Ereignissen, die voneinander unabhängig sind. Es kann auch gefragt werden nach einem Ereignis, welches zwei Unterfälle umfaßt. Ersteres war bei der Ziehung aus zwei Urnen, letzteres bei der Ziehung aus einer Urne mit mehrfarbigen Kugeln der Fall.

Unsere vorstehenden Entwicklungen können wir nun verallgemeinern und zusammenfassen wie folgt.

1. Es seien h Ereignisse gegeben mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_h$. Gesucht die Wahrscheinlichkeit W, daß die Ereignisse sämtlich eintreffen. Es wird

(6) $$W = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots w_h.$$

2. Dieselbe Bestimmung sei getroffen. Gesucht die Wahrscheinlichkeit W, daß wenigstens eins der Ereignisse eintreffe:

(7) $$W = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2) \ldots (1 - w_h).$$

3. Gegeben h Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \ldots, w_h$. Sie sind aber nicht voneinander unabhängig, sondern schließen sich gegenseitig aus.

Wenn irgend eins von ihnen eintritt, so kann kein anderes zugleich eintreten. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß eins von ihnen eintritt:

(8) $$W = w_1 + w_2 + \cdots + w_h.$$

Gesetz der großen Zahl. Ein Würfel hat sechs Seiten, die mit den Zahlen 1 bis 6 bezeichnet sind. Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Zahl, z. B. 1 zu werfen, ist also $\frac{1}{6}$. Wird nun der Versuch sehr oft, etwa 1000 mal angestellt, so dürfen wir erwarten, daß ungefähr 166 mal 1 geworfen wird. Das Ereignis, von welchem

wir hier reden, ist durch Umstände bestimmt, die wir nicht genau kennen. Wenn sich nun beim Versuche herausstellte, daß 1 nicht 166 mal, sondern vielleicht 500 mal fiele, also ebenso oft unter 1000 Versuchen wie die andern Zahlen zusammengenommen, so würden wir mit Recht schließen, daß ein besonderer Grund vorhanden sein muß, welcher die 1 so oft fallen läßt. Der Würfel würde also für das Spiel ungeeignet sein.

Allgemein kann man dies so ausdrücken.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sei W. Es werden n Versuche angestellt und zum Schluß die Zahl a festgestellt, welche angibt, wie oft das Ereignis wirklich beobachtet ist. Dann muß die Gleichung richtig sein:

(9) $$a = Wn,$$

und zwar in dem Sinne, daß der Quotient $a : n$ sich mit wachsendem n immer genauer dem Werte W nähert.

Die Erfahrung bestätigt dies Gesetz. Die Ziffern der Logarithmen etwa auf der 6ten Dezimale sind zwar durch mathematische Gesetze scharf bestimmt, aber diese Gesetze sind höchst verwickelter Natur. Man kann daher die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden und findet, da 10 Ziffern vorhanden sind, $W = 0{,}1$. Nun fand W. Jordan, Vermessungskunde I 455, daß bei 90000 abgezählten Zahlen auf der 6ten Dezimale die Null 8827 mal vorkommt. Es ist aber

$$8827 : 90000 = 0{,}098.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $W = 0{,}5$ zeigt an, daß das Eintreffen ebenso wahrscheinlich ist wie das Nichteintreffen. Sie wird zuweilen mittlere Wahrscheinlichkeit genannt.

Große praktische Bedeutung haben die Sterblichkeitstafeln. Die Einrichtung einer solchen zeigt mindestens zwei Spalten, von denen die erste von 0 bis 100 geht und die zweite anfangend mit etwa 10000 und endigend mit 0 die Zahl der gleichzeitig Geborenen angibt, welche den Beginn des durch die Zahl der ersten Spalte bezeichneten Jahres erleben. So findet sich in der Mortalitätstabelle, welche N. Herz in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung, Sammlung Schubert 19, mitteilt, neben 60 die Zahl 3470. Soviel Personen von 10000 gleichzeitig geborenen erreichen das 60. Lebensjahr. Ebenso zeigt die neben 40 stehende Zahl 5159, daß von diesen nur 3470 das 60. Lebensjahr erreichen. Für die Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung können wir nun sofort auf das Bild der Ziehung aus einer Urne verweisen. Fragen wir, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß ein 40jähriger das 60. Lebensjahr erreicht, so haben wir Ziehung aus einer Urne mit 5159 Kugeln, unter denen 3470 weiße sind.

§ 29. Kettenbrüche.

Seien zwei Zahlen gegeben, p, q und sei $p > q$. Bilden wir den Quotienten $p : q$, so ist das Ergebnis eine ganze Zahl, die wir a_0 nennen wollen, und es bleibt ein Bruch $p_1 : q$, für welchen $p_1 < q$ ist. Wir finden also:

$$(1) \qquad \frac{p}{q} = a_0 + \frac{p_1}{q}.$$

Nunmehr bilden wir den Quotienten $q : p_1$. Das Ergebnis ist eine ganze Zahl a_1 und es bleibt ein Bruch $q_1 : p_1$, dessen Zähler q_1 kleiner ist als der Nenner. Es ist

$$\frac{q}{p_1} = a_1 + \frac{q_1}{p_1}.$$

Nunmehr wiederholen wir das Verfahren und gelangen so zu der Entwicklung:

$$(2) \qquad \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

Diese Entwicklung nennt man einen Kettenbruch. Die Zahlen a_0, a_1, a_2, ... nennt man Teilnenner. Da die Schreibung in der Form (2) unbequem ist, wollen wir sie durch die folgende ersetzen:

$$(3) \qquad \frac{p}{q} = (a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots).$$

Wir wollen p, q als positive Zahlen voraussetzen. Dann kann a_0 den Wert Null annehmen, während jeder andere Teilnenner entweder 1 oder größer als 1 sein muß.

Wir wollen gleich mit einem interessanten Zahlenbeispiel beginnen. Es ist

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1};$$

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1};$$

also

$$\sqrt{2} = (1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots).$$

Die Quadratwurzel aus 2 läßt sich also in einen periodischen Kettenbruch mit eingliedriger Periode entwickeln. Diese Erscheinung nötigt uns dazu, die Berechnung des Kettenbruchs aus gegebenen Teilnennern zu untersuchen.

Bricht man den Kettenbruch mit dem Teilnenner a_0 ab, so ergibt sich aus (2) die Näherung

$$x_0 = \frac{a_0}{1}.$$

Bricht man mit a_1 die Entwicklung ab, so ergibt sich:

$$x_1 = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}.$$

Wollen wir hieraus den folgenden Näherungsbruch, wie wir die erhaltenen Werte nennen, berechnen, so müssen wir a_1 durch $a_1 + \frac{1}{a_2}$ ersetzen. Die Ausführung ergibt:

$$x_2 = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}.$$

Wir wollen nun die Zähler der Näherungsbrüche P_0, P_1, P_2, die Nenner Q_0, Q_1, Q_2 nennen. Dann ist:

$$P_0 = a_0, \quad P_1 = a_1 a_0 + 1, \quad P_2 = a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0,$$
$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = a_1, \quad Q_2 = a_2 a_1 + 1.$$

Um das allgemeine Gesetz der Entwicklung abzuleiten, beachten wir:

$$P_2 = a_2 P_1 + P_0; \quad Q_2 = a_2 Q_1 + Q_0.$$

Wollen wir x_3 berechnen, so haben wir in x_2 statt a_2 zu setzen $a_2 + \frac{1}{a_3}$. Dann findet sich für x_3 der Zähler $\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) P_1 + P_0$ und der Nenner $\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) Q_1 + Q_0$. Erweiterung mit a_3 schafft den Bruch:

$$x_3 = \frac{a_3(a_2 P_1 + P_0) + P_1}{a_3(a_2 Q_1 + Q_0) + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}.$$

Der Zähler und der Nenner befolgen das einfache Bildungsgesetz:

(4) $$P_3 = a_3 P_2 + P_1; \quad Q_3 = a_3 Q_2 + Q_1.$$

Damit ist das allgemeine Bildungsgesetz der Näherungsbrüche gefunden. Es hat den Ausdruck:

(5) $$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}; \quad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}; \quad x_n = P_n : Q_n.$$

Der allgemeine Beweis gelingt durch vollständige Induktion. Ersetzen wir a_n durch $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$, so geht x_n in x_{n+1} über. Aus (5) wird aber, wenn man den Nenner a_{n+1} fortschafft,

$$P_{n+1} = a_{n+1} \cdot P_n + P_{n-1}; \quad Q_{n+1} = a_{n+1} \cdot Q_n + Q_{n-1}.$$

Wenn also das Bildungsgesetz (5) bis zum Teilnenner a_n gilt, so gilt es auch bis zum folgenden Teilnenner, also allgemein.

Wenden wir das Bildungsgesetz (5) auf unser Zahlenbeispiel an, so ergibt sich:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \ldots.$$

Es ist:

$$3^2 - 2^2 \cdot 2 = 1, \quad 7^2 - 5^2 \cdot 2 = -1, \quad 17^2 - 12^2 \cdot 2 = 1,$$

$$41^2 - 29^2 \cdot 2 = -1, \quad 99^2 - 70^2 \cdot 2 = 1, \quad \text{usw.}$$

Wir haben die Lösungen der Gleichungen

$$t^2 - 2u^2 = \pm 1 \tag{6}$$

vor uns; t sind die Zähler, u die Nenner der Näherungsbrüche. Es zeigt sich, daß diese Brüche abwechselnd kleiner oder größer als $\sqrt{2}$ sind, da ihre Quadrate um 2 vermindert abwechselnd positiv und negativ sind. Diese Erscheinung wollen wir, so weit es möglich ist, verallgemeinern.

Aus (5) folgt durch Wegschaffung von a_n:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}). \tag{7}$$

Diese Gleichung zeigt, daß der links stehende Ausdruck nur sein Vorzeichen ändert, wenn man n in $n-1$ verwandelt. Folglich brauchen wir nur $P_2 Q_1 - Q_2 P_1$ zu bilden, um, abgesehen vom Vorzeichen, den Wert der linken Seite von (7) zu erhalten. Es ist aber

$$P_2 Q_1 - Q_2 P_1 = -(P_1 Q_0 - Q_1 P_0),$$

$$a_0 a_1 + a_1 a_2 (a_1 a_0 + 1) - (a_1 a_0 + 1)(a_2 a_1 + 1) = -1;$$

$$(a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1.$$

Also haben wir

$$\begin{cases} P_n Q_{n-1} - \quad Q_n P_{n-1} = \pm 1, \\ P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2} = \mp 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \pm \dfrac{1}{Q_n Q_{n-1}} = x_n - x_{n-1}, \\ \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \dfrac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \mp \dfrac{1}{Q_{n-1} Q_{n-2}} = x_{n-1} - x_{n-2}. \end{cases} \tag{9}$$

Setzt man die Reihe der Gleichungen (9) fort, so ergibt sich durch Addition eine Entwicklung von x_n.

Sie hat den Ausdruck:

$$x_n - a_0 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} - \frac{1}{Q_3 Q_4} + \cdots. \tag{10}$$

So ist für unser Beispiel:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{7}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{10},$$
$$\frac{17}{12} - \frac{7}{5} = \frac{1}{60},$$
$$\frac{41}{29} - \frac{17}{12} = -\frac{1}{348},$$

$$\frac{41}{29} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{60} - \frac{1}{348},$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 12} - \frac{1}{12 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 70} - \cdots.$$

Aus unserm Bildungsgesetz (5) folgt:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}},$$
$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}.$$

Folglich ist:

(11) $$P_n : P_{n-1} = (a_n;\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_1,\ a_0).$$

Ebenso ist:

(12) $$Q_n : Q_{n-1} = (a_n;\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_1).$$

Aus den Gleichungen (9) erkennen wir, daß die Differenzen der Näherungsbrüche in ihrer natürlichen Reihenfolge entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist $x_n - x_{n-1}$ positiv, so ist $x_{n-1} - x_{n-2}$ negativ. Wir können den wahren Wert des ganzen Bruches, den die Entwicklung des Kettenbruchs darstellt, nicht erhalten, wenn wir ihn mit a_n abbrechen. Denn auf a_n folgen noch weitere Glieder. Setzen wir

$$y = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}}.$$

Wollen wir also den wahren Wert des ganzen Bruches finden, so müssen wir y statt a_n verwenden. Es sei

(13) $$x = (a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots).$$

Dann ist x derjenige Wert, der aus (5) für den Quotienten $P_n : Q_n$ hervorgeht, wenn man a_n durch y ersetzt. Also ist

(14) $$x = \frac{y P_{n-1} + P_{n-2}}{y Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Es folgt durch Subtraktion:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\pm 1}{Q_{n-1}(yQ_{n-1} + Q_{n-2})}.$$

Nun ist aber y eine positive Zahl und $y > a_n$, also

$$yQ_{n-1} + Q_{n-2} > a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

also

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{\pm 1}{Q_{n-1}Q_n};$$

d. h. der Unterschied zwischen dem ganzen in einen Kettenbruch entwickelten Werte x und einem Näherungsbruch ist abwechselnd positiv und negativ. Sein Wert, abgesehen vom Vorzeichen, ist kleiner als Eins geteilt durch das Produkt $Q_{n-1} \cdot Q_n$ oder weil $Q_n > Q_{n-1}$, kleiner als Eins geteilt durch das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches.

Aus Gleichung (14) folgt:

(15) $$y = \frac{P_{n-2} - xQ_{n-2}}{xQ_{n-1} - P_{n-1}}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$y + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} = \frac{Q_{n-1}P_{n-2} - P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_{n-1}(xQ_{n-1} - P_{n-1})},$$

oder

(16) $$y + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} = \frac{\pm 1}{Q_{n-1}(xQ_{n-1} - P_{n-1})}.$$

Die einfachste Anwendung der Kettenbrüche besteht in der Ersetzung unbequemer Verhältniszahlen durch einfache. Ist z. B. gegeben

$$\pi = 3{,}14159265,$$

so verwandeln wir den Bruch:

$$314159265 : 10^8$$

in einen Kettenbruch und bestimmen aus den Teilnennern die Näherungsbrüche, welche für π einfache Verhältniszahlen ergeben. Die Kettenbruchentwicklung ergibt

$$\pi = (3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 66,\ 1,\ 4,\ 32,\ 2,\ 3,\ 2).$$

Die ersten Näherungsbrüche sind

$$\pi = \frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113}.$$

Der letzte prägt sich dem Gedächtnis leicht ein in der Schreibung 355 : 113. Die Ausrechnung ergibt

$$355 : 113 = 3{,}1415929 \ldots.$$

Die 7te Stelle nach dem Komma ist ungenau.

Die durch die Kettenbrüche gegebenen Näherungen besitzen eine gewisse Vollkommenheit vor allen sonstigen Näherungswerten, auf die wir nun eingehen wollen.

Aus Gleichung (14) folgt:

$$(17)\qquad \begin{cases} x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\pm 1}{Q_{n-1}(yQ_{n-1}+Q_{n-2})} \quad \text{und} \\ \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - x = \frac{\pm y}{Q_{n-2}(yQ_{n-1}+Q_{n-2})}, \end{cases}$$

wobei

$$Q_{n-1}P_{n-2} - P_{n-1}Q_{n-2} = \pm 1.$$

Die rechten Seiten beider Ausdrücke (17) sind mit gleichem Vorzeichen behaftet. Also liegt x zwischen den Werten der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche $P_{n-2} : Q_{n-2}$ und $P_{n-1} : Q_{n-1}$. Da die rechte Seite der ersten Gleichung (17), abgesehen vom Vorzeichen, kleiner ist als die rechte Seite der zweiten, so liegt x dem Bruche $P_{n-1} : Q_{n-1}$ näher als dem vorhergehenden $P_{n-2} : Q_{n-2}$.

Der wahre Wert liegt also zwischen zwei einander folgenden Näherungsbrüchen und zwar dem nachfolgenden Bruche näher als dem vorhergehenden.

Soll nun irgend ein Bruch $a : b$ dem wahren Werte x noch näher liegen als jeder der beiden einander folgenden Näherungsbrüche

$$x_{n-1} = P_{n-1} : Q_{n-1} \quad \text{und} \quad x_n = P_n : Q_n,$$

so können wir folgendes feststellen. Sei $x_n > x_{n-1}$, also

$$(18)\qquad P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = +1.$$

Es muß $\frac{a}{b}$, da es dem x näher liegen soll als jedes der x_{n-1}, x_n, und da x zwischen x_{n-1} und x_n liegt, auch zwischen diesen Werten liegen und zwar nach der getroffenen Festsetzung $x_n > x_{n-1}$ muß sein

$$x_n - \frac{a}{b} > 0, \quad \frac{a}{b} - x_{n-1} > 0.$$

Beseitigt man die Nenner, so folgt:

$$\begin{aligned} bP_n \quad - aQ_n \quad &= m; \quad P_{n-1}; \quad Q_{n-1}; \\ -bP_{n-1} + aQ_{n-1} &= n; \quad P_n; \quad Q_n. \end{aligned}$$

m, n sind positiv und ganze Zahlen, wenn a und b ganze Zahlen sind. Es folgt durch Multiplikation mit den nebengeschriebenen Zahlen und folgende Addition mit Hülfe von (18):

$$\begin{aligned} a &= nP_n \quad + mP_{n-1}, \\ b &= mQ_{n-1} + nQ_n. \end{aligned}$$

a und b sind jedes größer als bezüglich P_n, P_{n-1} und Q_n, Q_{n-1}.

Wenn also ein Näherungswert genauer sein soll als ein Kettenbruchsnäherungswert, dann muß er in größeren Zahlwerten gegeben sein. Oder: die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung geben die mögliche Näherung in den kleinsten Zahlwerten.

Eine zweite Anwendung der Kettenbrüche ist die ganzzahlige Lösung der unbestimmten Gleichung

$$ax - by = 1. \tag{19}$$

a und b seien ganze positive Zahlen. Entwickelt man $a : b$ in einen Kettenbruch, so kann man die Entwicklung immer auf zwei verschiedene Arten schließen. Der letzte Teilnenner ist nämlich 1 oder eine von 1 verschiedene Zahl. Im ersteren Falle kann man statt des Schlusses auf $n + \frac{1}{1}$ auf $n + 1$ schließen; im zweiten Falle kann man statt mit n auch mit $n - 1 + \frac{1}{1}$ schließen. Setzt man also $a = P_n$, $b = Q_n$, so kann man immer die Entwicklung so führen, daß Gleichung (18) erfüllt ist. Dann nimmt man

$$x = Q_{n-1}, \quad y = P_{n-1} \tag{20}$$

und hat die Lösung von (19). Die Aufgabe ist unlösbar, wenn a und b nicht relativ prim sind. Aus einer gefundenen Lösung ergeben sich alle übrigen durch die Gleichungen (k ganze Zahl):

$$x = Q_{n-1} + bk, \quad y = P_{n-1} + ak. \tag{21}$$

Eine dritte Anwendung der Kettenbrüche ergibt die Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen. Wir beginnen mit einem Beispiel. Es soll der Wert des unendlichen Kettenbruchs bestimmt werden:

$$x = (a_0;\, a_1,\, a_1,\, a_1,\, \ldots).$$

Die Lösung schließt sich am einfachsten an die ausführliche Schreibung an. Es ist

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{x - a_0} = a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}$$

oder

$$\frac{1}{x - a_0} = a_1 + x - a_0.$$

Man findet demnach für x die quadratische Gleichung

$$(x - a_0)(x - a_0 + a_1) = 1,$$

oder

$$x^2 - (2a_0 - a_1)x + a_0^2 - a_0 a_1 - 1 = 0.$$

Nimmt man $a_1 = 2a_0$, so wird

$$x^2 = a_0^2 + 1.$$

Hiernach erhalten die Gleichungen

$$x^2 = 2, \quad x^2 = 5, \quad x^2 = 17, \quad x^2 = 26, \quad x^2 = 65$$

sehr einfache Lösungen durch periodische Kettenbrüche.

In gleicher Weise kann man den unendlichen Kettenbruch mit zweigliedriger Periode behandeln:

$$x = (a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_1,\ a_2,\ \ldots).$$

Die Gleichung wird

$$a_1 x^2 + (a_1 a_2 - 2a_0 a_1)x - a_0 a_1 a_2 + a_1 a_0^2 - a_2 = 0.$$

Einfache Ergebnisse erhält man für die Annahmen:

$$a_0 = m a_1, \quad a_2 = 2 m a_1, \quad x^2 = m^2 a_1^2 + 2m.$$

Für	$m = 1,$	$a_1 = 1$	wird	$x^2 = 3,$
„	$m = 1,$	$a_1 = 2$	„	$x^2 = 6,$
„	$m = 1,$	$a_1 = 3$	„	$x^2 = 11,$
„	$m = 2,$	$a_1 = 1$	„	$x^2 = 8,$
„	$m = 2,$	$a_1 = 3$	„	$x^2 = 40.$

Umgekehrt kann man jede reelle Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzen Vorzahlen in einen Kettenbruch verwandeln. Die Wurzel möge positiv sein. Ist sie negativ, so berücksichtigen wir nur den mit negativem Vorzeichen versehenen reellen positiven Wert. Die Gleichung sei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Es sei durch Probieren gefunden, daß x zwischen den positiven Zahlen a_0 und $a_0 + 1$ liegt.

Dann setzen wir

$$x = a_0 + \frac{1}{y}.$$

Es ist dann $y > 1$. Die Ausrechnung ergibt

$$(a a_0^2 + b a_0 + c) y^2 + (2 a a_0 + b) y + a = 0.$$

Da y eine positive Zahl größer als Eins ist, so kann man durch Probieren wieder eine Zahl a_1 von der Beschaffenheit finden:

$$a_1 < y < a_1 + 1.$$

Wir setzen

$$y = a_1 + \frac{1}{z}.$$

und formen die vorige Gleichung in eine solche nach z um. So kann man fortfahren, und es läßt sich zeigen, daß die Ausführung zu einem periodischen Kettenbruch Anlaß gibt. Wir verzichten indes auf eine theoretische Begründung und begnügen uns mit einem Zahlenbeispiel:

$$x^2 = 7; \quad x = 2 + \frac{1}{y};$$

$$3y^2 - 4y - 1 = 0; \quad y = 1 + \frac{1}{z};$$

$$2z^2 - 2z - 3 = 0; \quad z = 1 + \frac{1}{u};$$

$$3u^2 - 2u - 2 = 0; \quad u = 1 + \frac{1}{v};$$

$$v^2 - 4v - 3 = 0; \quad v = 4 + \frac{1}{w};$$

$$3w^2 - 4w - 1 = 0; \quad w = y.$$

Sei die gegebene Zahl D. Ein Kettenbruchnäherungswert sei $x : y$. Dann ist

$$\frac{x}{y} - \sqrt{D} < \frac{\pm 1}{y^2},$$

also

$$x - y\sqrt{D} < \frac{\pm 1}{y},$$

$$x - y\sqrt{D} = \frac{\delta}{y},$$

wo δ eine Zahl bedeutet, deren absoluter Wert kleiner als Eins ist. Es folgt

$$x + y\sqrt{D} = \frac{\delta}{y} + 2y\sqrt{D}.$$

Die Multiplikation ergibt

$$x^2 - Dy^2 = \frac{\delta^2}{y^2} + 2\delta\sqrt{D},$$

also für den absoluten Wert der linken Seite

$$(22) \qquad x^2 - Dy^2 < 1 + 2\sqrt{D}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist eine ganze Zahl. Da wir D als Nichtquadratzahl vorausgesetzt haben, geht die Kettenbruchentwicklung nicht zu Ende, und man erhält unzählig viele Näherungsbrüche, also unendlich viele Zahlenpaare x, y. Da nach (22) der Wert $x^2 - Dy^2$ unter einer bestimmten festen Grenze liegt, so muß unendlich oft derselbe Wert α angenommen werden, also

$$x^2 - Dy^2 = \alpha$$

muß für gewisse Zahlen $\alpha < 1 + 2\sqrt{D}$ unendlich oft gelöst werden. Stellen wir diese Lösungen zusammen und bilden $x \equiv \xi \bmod \alpha$, $y \equiv \eta \bmod \alpha$, wobei wir unter ξ und η die kleinsten positiven Reste verstehen. Dann gilt wieder dieselbe Schlußweise; es muß Wiederkehr der Reste stattfinden, so daß zugleich ist:

$$x^2 - Dy^2 = x_1{}^2 - Dy_1{}^2 = \alpha; \qquad x - x_1 = k\alpha, \quad y - y_1 = l\alpha.$$

Bilden wir nun das Produkt:

$$(x + y\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D}) = xx_1 - yy_1 D + (x_1 y - xy_1)\sqrt{D},$$

so ist

$$(xx_1 - yy_1 D)^2 - (x_1 y - xy_1)^2 D = (x^2 - Dy^2)(x_1{}^2 - Dy_1{}^2),$$
$$(xx_1 - yy_1 D)^2 - (x_1 y - xy_1)^2 D = \alpha^2.$$

Nun ist

$$xx_1 = x_1{}^2 + k\alpha x_1, \quad yy_1 D = y_1{}^2 D + l\alpha y_1 D,$$
$$x_1 y - xy_1 = l\alpha x_1 - k\alpha y_1,$$

also nach Einsetzung in die drittletzte Gleichung und Entfernung des Faktors α^2

(23) $$(1 + kx_1 - ly_1 D)^2 - (lx_1 - ky_1)^2 D = 1.$$

Hiermit ist der Beweis erbracht, daß die Kettenbruchentwicklung zur Lösung der Pellschen Gleichung führt. Allerdings tut sie das noch in anderer Weise und zwar unmittelbar. Wir verzichten auf den Nachweis und bestätigen die Behauptung durch das von uns gegebene Zahlenbeispiel: $x^2 = 7$. Es ist

$$x' = (2;\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ \ldots).$$

Die Näherungsbrüche sind

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48}.$$
$$x^2 - Dy^2 = -3,\ 2,\ -3,\ 1,\ 2,\ -3,\ 1.$$

Auch die Kubikwurzel kann in einen Kettenbruch verwandelt werden. Die Teilnenner zeigen jedoch nicht die einfache Gesetzmäßigkeit wie bei der Quadratwurzel. Sei $x^3 = D$ und D eine positive ganze Zahl, aber keine Kubikzahl. Wir bilden

(24) $$y = u + vx + wx^2,$$

wo u, v, w ganze positive oder negative Zahlen bedeuten. Wir haben S. 107 den Begriff der Norm dieser Zahl aufgestellt und Beziehungen zur Berechnung der Kubikwurzel auf viele Stellen gegeben. Entwickelt man x und x^2 jedes in einen Kettenbruch, so zeigen wiederum weder die Teilnenner noch die Näherungsbrüche einfache Beziehungen zueinander. Geht man von der Annahme aus, in der

Entwicklung von x einen Näherungsbruch $\frac{v}{w}$ und in derjenigen von x^2 einen Näherungsbruch $\frac{u}{w}$ anzutreffen, welche also im Nenner übereinstimmen, so bilden wir mit Hülfe dieser Zahlen u, v, w die Irrationalität y gemäß (24). Die Ergänzung zur Norm, S. 106, Gl. (11) und (12) wird dann

$$y'y'' = (u - \tfrac{1}{2}vx - \tfrac{1}{2}wx^2)^2 + \tfrac{3}{4}(vx - wx^2)^2.$$

Nun ist

$$\frac{v}{w} - x = \frac{\delta}{w^2}, \quad \frac{u}{w} - x^2 = \frac{\varepsilon}{w^2},$$

wo δ und ε Zahlen sind, deren absolute Werte kleiner als Eins. Die Ergänzung wird nach gehöriger Ausrechnung

$$y'y'' = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon\delta x + \delta^2 x^2}{w^2}.$$

Die Zahl y selbst wird

$$y = 3wx^2 + \frac{\varepsilon + \delta x}{w}.$$

Daher

$$yy'y'' < 3\frac{1 + x + x^2}{w}x^2 + \frac{(1 + x + x^2)(1 + x)}{w^3}.$$

Nun ist x eine festbestimmte Größe, $yy'y''$ ist als Norm eine ganze Zahl, größer als Eins oder gleich Eins; also kann w eine bestimmte Grenze nicht überschreiten. Damit haben wir den Satz: Ist $x^3 = D$ und entwickelt man x und x^2 jedes in einen Kettenbruch, so können von einer bestimmten Grenze an in den beiden Entwicklungen Näherungsbrüche mit gleichem Nenner nicht auftreten.

§ 30. Unbestimmte Gleichungen.

Wenn die Zahl der unabhängigen Bestimmungsgleichungen kleiner ist als die Zahl der Unbekannten, so ist die gestellte Aufgabe unbestimmt. Wichtig ist besonders diejenige Klasse von unbestimmten Gleichungen, deren Vorzahlen ganze Zahlen sind und bei denen auch die Lösung ganzzahlig sein soll. Wir gehen von einem Beispiele aus. Sei gegeben:

$$7x + 11y = 100.$$

Wir wählen die kleinste Vorzahl 7, dividieren die Gleichung durch 7 und bestimmen für jedes Glied den kleinsten positiven Rest. Dann wird

$$x + y + \frac{4y}{7} = 14 + \frac{2}{7},$$

oder:

$$\frac{4y-2}{7} = 14 - x - y.$$

Weil x, y ganze Zahlen sein sollen, muß auch die linke Seite der letzten Gleichung eine ganze Zahl sein. Wir nennen sie z und gelangen so zu der neuen Gleichung

$$4y - 7z = 2.$$

Ist sie gelöst, so ist die ganze Aufgabe gelöst, weil

$$z = 14 - x - y$$

ist und daher x ganzzahlig durch y und z ausdrückbar ist. Wir haben durch unser Verfahren die gegebene Gleichung $7x + 11y = 100$ auf die andere $4y - 7z = 2$ zurückgeführt. Diese hat kleinere Vorzahlen als die gegebene, und darin liegt der Lösungsgedanke, der bei wiederholter Anwendung zum Ziel führt. In der Tat findet man

$$y = z + \frac{3z}{4} + \frac{2}{4},$$

und hat nun zu setzen

$$3z + 2 = 4u,$$

$$y = z + u.$$

Nunmehr ergibt sich durch Anwendung des gleichen Verfahrens

$$z = u + \frac{u-2}{3},$$

$$u = 3v + 2.$$

Nun folgt

$$z = 4v + 2, \quad y = 7v + 4, \quad x = 8 - 11v.$$

Damit ist die Lösung gegeben, wie die Probe bestätigt:

$$7(8 - 11v) + 11(4 + 7v) = 100.$$

Der so einfache Lösungsgedanke ist aufs engste mit der Kettenbruchentwicklung S. 154 und mit der Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen S. 34 verwandt. Erstere Beziehung führt, wie wir S. 160 gesehen haben, unmittelbar zur Lösung der Gleichung

$$ax - by = 1.$$

Aus dieser Lösung mittels Kettenbruchentwicklung kann man diejenige der Gleichung $ax + by = c$ ableiten. Dieser Hinweis mag genügen. Unlösbar ist $ax + by = c$ in ganzen Zahlen, wenn a und b einen gemeinsamen Teiler besitzen, den c nicht hat.

Der Lösungsgedanke läßt sich leicht verallgemeinern. Sei gegeben

(1) $$ax + by + cz = d.$$

a, b, c, d seien ganze Zahlen, positiv oder negativ, und es sei $(a) \leqq (b) \leqq (c)$. Wir dividieren durch a und zerlegen $b:a$ und $c:a$ in einen ganzzahligen Teil und einen positiven oder negativen Teil, der seinem absoluten Zahlwert nach unter (a) liegt. Indem wir die mit dem Nenner a behafteten Teile u nennen, die Reste von b, c und d mit b', c', d' bezeichnen, finden wir:

(2) $$b'y + c'z - au = d'.$$

Diese neue Gleichung ist einfacher als die gegebene, weil die Zahlwerte b', c', a, d' entsprechend kleiner sind. Ist sie gelöst, so ist auch die gegebene Gleichung gelöst, weil x durch y, z, u ganzzahlig bestimmt ist. Ist b' oder c' gleich 1, so ist (2) gelöst. Ist keine von ihnen 1, so wiederholt man das obige Verfahren in Anwendung auf (2).

Seien zwei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Man kann auf mancherlei Art verfahren. Wenn a_1 und a_2 keinen gemeinsamen Teiler haben, so ist die Gleichung lösbar:

$$ma_1 + na_2 = 1.$$

Sie bestimmt x durch y und z. Eliminiert man aus den gegebenen Gleichungen x, so bleibt eine Gleichung zwischen y und z, die man nach den früheren Methoden lösen kann. Gewöhnlich führt irgend ein Kunstgriff zu einer einfachen Lösung. So kann man aus

$$3x + 4y + 5z = 1,$$

$$6x + 7y + 8z = 1$$

ableiten $x = z - 1$, $y = 1 - 2z$. Ein willkürlich für z gewählter Wert befriedigt beide Gleichungen.

Unter den unbestimmten Gleichungen zweiten Grades ist eine der bekanntesten

(3) $$x^2 + y^2 = z^2.$$

Sie verdankt dem rechtwinkligen Dreieck ihren Ursprung. Ihre Lösung ist

(4) $$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2.$$

Die Gleichung

(5) $$x^m + y^m = z^m$$

ist für $m > 2$ nicht lösbar, wenn x, y, z ganze (oder rationale) Zahlen sein sollen. Dies besagt der große Fermatsche Satz, dessen allgemein

gültiger Beweis allerdings noch nicht erbracht ist. Eine weitere merkwürdige Aufgabe ist die folgende:

$$(6) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = u^3.$$

Sie hat die einfachen Lösungen

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5, \quad u = 6;$$
$$x = 8, \quad y = 6, \quad z = 1, \quad u = 9;$$
$$x = 10, \quad y = 9, \quad z = -1, \quad u = 12.$$

Eine allgemeine Lösung von (6) ist

$$x = m\alpha - n^2, \quad y = -m\beta + n^2, \quad z = -n\alpha + m^2,$$
$$u = -n\beta + m^2.$$

Die Zahlen α, β, m, n sind durch die Gleichung verbunden

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn.$$

Vgl. Lampes Archiv III, Reihe II, S. 280. Aus der Selbstgleichung

$$(9\lambda + 1)^3 - 1 = \lambda\{(9\lambda + 3)^3 - (9\lambda)^3\}$$

ergeben sich, wenn man λ gleich einer Kubikzahl nimmt, unzählig viele Lösungen der Gleichung

$$z^3 = x^3 + y^3 \pm 1.$$

Es ist z. B.

$$12^3 = 10^3 + 9^3 - 1, \quad 150^3 = 144^3 + 73^3 - 1,$$
$$144^3 = 138^3 + 73^3 + 1, \quad 738^3 = 729^3 + 244^3 - 1,$$
$$729^3 = 720^3 + 242^3 + 1.$$

Diese merkwürdigen Gleichungen bilden ein Gegenstück zu der nicht ganzzahlig lösbaren $x^3 + y^3 = z^3$.

Die unbestimmten Gleichungen führen zum Teil zu den schwierigsten Aufgaben. Sie haben zur Entwicklung der Lehre von den quadratischen und höheren Formen geführt und nur dieser Fortschritt kann zur endgültigen Lösung aller Fragen führen.

Es sollen hier nur zwei Methoden angegeben werden, welche vielfach mit Erfolg benutzt werden können. Sei gegeben

$$(7) \qquad z^2 = x^2 - Dy^2,$$

wo D eine positive ganze Zahl, aber keine Quadratzahl bedeutet. Es ist

$$z^2 = (x - y\sqrt{D})(x + y\sqrt{D}).$$

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$(t - u\sqrt{D})^2 = t^2 + Du^2 - 2tu\sqrt{D},$$
$$(t + u\sqrt{D})^2 = t^2 + Du^2 + 2tu\sqrt{D},$$

so ergibt sich alsbald die Lösung:

(8) $$z = t^2 - Du^2, \quad x = t^2 + Du^2, \quad y = 2tu.$$

Die Ausrechnung bestätigt das Ergebnis. Wir haben

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z^2 = x^2 + 2y^2, \quad z^2 = x^2 + 3y^2 \quad \text{usw.}$$

als besondere Fälle. Die Einschränkungen, welche wir uns bei Bestimmung von D auferlegten, können wir teilweise fallen lassen.

Eine zweite Methode ist dann mit Erfolg anzuwenden, wenn bereits eine Lösung der Aufgabe bekannt ist. Wir wollen sie ebenfalls an einem Beispiele auseinandersetzen. Die Gleichung

$$z^2 = y^3 + 3$$

ist erfüllt für $y = 1$, $z = 2$. Wir setzen

$$y = 1 + u, \quad z = 2 + uv.$$

Dann erhält man für u den Wert

$$u = \frac{2 - 4v}{v^2 - 1},$$

indem nach Division durch u eine Gleichung ersten Grades übrig bleibt. Man findet die Beispiele:

$$v = 2, \quad u = -2, \quad y = -1, \quad z = -2,$$
$$v = 3, \quad u = -\frac{5}{4}, \quad y = -\frac{1}{4}, \quad z = -\frac{7}{4} \quad \text{usw.}$$

Die Lösungen sind mit einer Ausnahme nicht ganzzahlig, aber rational.

Zum Schluß wollen wir ein Beispiel geben, welches sich schon in Eulers Algebra findet. Die Aufgabe ist

$$y^2 = 1 + 3x^3.$$

Eine Lösung dieser Aufgabe ist $x = 1$. Wir setzen also $x = 1 + z$ und $y = 2 + pz$. Dann wird

$$4 + 4pz + p^2z^2 = 4 + 9z + 9z^2 + 3z^3.$$

Setzen wir $4p = 9$, so kann man durch z^2 dividieren, wodurch z linear bestimmt wird. Es findet sich

$$z = -\frac{21}{16}, \quad \text{also} \quad x = -\frac{5}{16}, \quad y = -\frac{61}{64}.$$

Sei allgemein eine Lösung $y_0^2 = 1 + 3x_0^3$ gegeben, so entspringt daraus nach unserer Methode die neue

$$2py_0 = 9x_0^2, \quad 3z = p^2 - 9x_0^2$$

und

$$x = \frac{3x_0^4 - 8x_0}{12x_0^3 + 4}.$$

Aus jeder Lösung entspringt also eine Kette von unendlich vielen neuen Lösungen.

Diese einfachen Entwicklungen hängen mit der Theorie der elliptischen Funktionen zusammen. Aus einer Lösung x_0, y_0 der Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

ergibt sich nach obigem Verfahren die neue

$$x = \frac{(x_0^2 + \frac{1}{4} g_2)^2 + 2 g_3 x_0}{4 x_0^3 - g_2 x_0 - g_3}.$$

Und das ist der Ausdruck für die Verdopplung des Arguments der Weierstraßschen Funktion $\wp u$.

Zweiter Teil.

Planimetrie.

§ 1. Einleitung.

Wie wir bei Einleitung in die Arithmetik gesehen haben, stammt der Begriff der Zahl aus der Erfahrung. Wir brauchten nur gleichartige Dinge wahrzunehmen, um durch die Gegenüberstellung zu den Begriffen der Einheit und Vielheit, den Grundlagen des Zahlbegriffs zu gelangen. In der Geometrie müssen wir näher auf die Beschaffenheit der Außendinge eingehen.

In frühester Jugend haben wir durch zahllose Versuche und Erfahrungen den Begriff des festen Körpers entwickelt. Auge und Hand des Kindes erkennt seine Eigenschaften, unter denen die Undurchdringlichkeit sich wohl zuerst wahrnehmbar macht. Schon am einfachsten Spielzeug entwickelt die Beobachtung des Kindes weiter den Begriff des Außenraumes und Innenraumes und damit den Begriff der Fläche als Grenze beider Gebiete. Neben der Undurchdringlichkeit der festen Körper ist ihre Teilbarkeit für die Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe wichtig. Zwei verschiedene Teilungen desselben Körpers können zum Begriffe der Linie führen, eine weitere Teilung zum Begriff des Punktes. Als dritte wichtige Eigenschaft der Naturkörper, insbesondere der festen Körper, ist ihre Beweglichkeit zu erwähnen. Sie lassen sich bewegen, ohne ihre Gestalt irgend zu ändern. Die fortschreitende Bewegung kann zeigen, wie Punkt, Linie, Fläche, Körper erzeugt werden. Die Umdrehung um eine feste Achse gibt wohl die beste „Erklärung" der geraden Linie*) (vergl. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, 2. Aufl., S. 47). Hiermit sind wir nun schon zu gewissen eigentümlichen Begriffsbildungen fortgeschritten, welche durch die große Reichhaltigkeit und Verschiedenheit ihrer Merkmale auf die Notwendigkeit einer übersichtlichen Ordnung hinweisen. Diese Ordnung

*) In dem hochinteressanten Werke Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900, wird sie S. 37 v. Staudt und Leibnitz zugeschrieben.

gewinnen wir durch Einführung und Betrachtung weniger Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene. Die Außenwelt bietet uns Gelegenheit, diese Grundgebilde an gewissen Körpern, wie dem Quader, mit besonderer Leichtigkeit zu entwickeln. Der Begriff verschiedener Ebenen erfordert geradezu das Hinaustreten in die Körperwelt, während die Geraden und Punkte in einer Ebene am einfachsten aus Zeichnungen begrifflich entwickelt werden. Eine feine mit dem Lineal gezogene Linie braucht nur der ihr stets anhaftenden Zufälligkeiten und Mängel entkleidet zu werden, um den Begriff der Geraden zu liefern. Die Fläche des zum Zeichnen der Figuren dienenden Papiers dient zur Entwicklung des Begriffes der Ebene, der Begriff des Punktes wird durch Eindrücken der Zirkelspitze gewonnen, indem wir diesen wahrnehmbaren Vorgang von allem Fremdartigen und Zufälligen reinigen.

Da die Begriffe des Punktes, der Geraden und der Ebene gebildet sind, um die höchst verwickelten Eindrücke der Außenwelt zu ordnen und weiterer Betrachtung für den Menschengeist zu unterwerfen, so können sie nicht auf noch einfachere Begriffe zurückgeführt werden. Diese Zurückführung nennen wir Erklärung. Es kann nicht alles erklärt werden; endlich muß bei gewissen Begriffen Halt gemacht werden, die nicht weiter zurückführbar sind, den Grundbegriffen.

Wenn wir nun fragen, ob Punkt, Gerade, Ebene in der Außenwelt wirklich vorhanden sind, so ist das eine ähnliche Frage wie folgende: Ist der Äquator, ist der Nordpol, ist der 24. Längengrad, der 51. Breitengrad, ist ihr Schnittpunkt in der Außenwelt vorhanden oder nicht? Alle diese Begriffe sind Gedankendinge, aber nicht rein Gedachtes, sondern sie beruhen auf Erfahrung und geben Anlaß zu weiteren Erfahrungen, denen sie Ziel und Richtung weisend gegenüberstehen. Es sind *entia rationis cum fundamento in re.*

Unter den vielen Versuchen, die Grundbegriffe zu erklären, also auf andere Grundbegriffe zurückzuführen, seien die berühmten Sätze des Altmeisters Euklid angeführt:

Punkt ist, was keinen Teil hat. Eine Gerade ist eine Linie, die zwischen in ihr befindlichen Punkten immer gleichmäßig liegt. Ebene ist eine Fläche, die zwischen den in ihr befindlichen Geraden immer gleichmäßig liegt.

Wir haben uns in der Übersetzung an Tropfke (Geschichte der Elementarmathematik) angeschlossen.

Als augenblicklich (1898) sehr beliebt bezeichnet W. Killing (Grundlage der Geometrie II, 177) folgende:

Die Gerade ist diejenige Linie, welche durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist.

Die Ebene ist diejenige Fläche, welche durch eine Gerade und einen nicht in ihr enthaltenen Punkt bestimmt ist.

Beachtung verdienen auch die Versuche, die Gerade und Ebene aus Kreis und Kugel herzuleiten. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf das angeführte Werk Questioni riguardanti la geometria elementare, S. 39, und W. Killing, Grundlagen der Geometrie II, 185.

Zahlreich sind auch die Versuche, eine Erklärung des Winkels zu geben. Euklid erklärt den ebenen Winkel als Neigung zweier sich in einer Ebene treffenden und nicht in einer Geraden liegenden Linien (Tropfke II, 17).

Wir erwähnen den Winkel als Richtungsunterschied, als Drehungsgröße, als Teil der unendlichen Ebene. Bei Hilbert, Grundlagen der Geometrie, finden wir S. 8 den Winkel als System zweier Halbstrahlen erklärt. Diese Erklärung erwähnt auch W. Killing II, 169 des genannten Werkes.

Den genannten Grundbegriffen schließen sich an das Strahlenbüschel als Gesamtheit aller durch einen Punkt der Ebene gehenden Geraden; das Ebenenbüschel als Gesamtheit aller durch eine Gerade (Achse) gehenden Ebenen; das Strahlenbündel als Gesamtheit aller durch einen Punkt im Raume gehenden Geraden; das Ebenenbündel als Gesamtheit der durch einen Punkt im Raum gehenden Ebenen. Ebenso können wir die Gerade als Gesamtheit ihrer Punkte (Träger der Punktreihe) auffassen; desgleichen die Ebene als Gesamtheit aller ihrer Punkte (Träger des ebenen Punktgefüges) oder aller ihrer Geraden. Endlich kann der Raum als Gesamtheit aller seiner Punkte oder aller seiner Geraden oder aller seiner Ebenen angesehen werden. Vgl. Enriques-Fleischer, Vorlesungen über projektive Geometrie. B. G. Teubner 1903.

Auch der Gesamtraum gehört zu den Grundbegriffen. Gehen wir von den Vorstellungen der natürlichen Anschauung aus, die in der Euklidischen Geometrie wissenschaftlich geordnet sind, so ist er die Möglichkeit unbegrenzter Ausdehnung und Bewegung, er ist kein für sich bestehendes Ding, sondern ein Gedankending, welches zur verstandesmäßigen Auffassung und Ordnung wirklicher, von unserm Denken unabhängiger Dinge gesetzt wird. Die Unendlichkeit des Gesamtraumes ist durch Leugnung der Begrenzung verstandesmäßig erfaßt; Phantasiebilder können diese Eigenschaft nicht völlig erschöpfen.

Wie man nicht alles erklären kann, so kann man auch nicht alles beweisen. Beweisen heißt, einen verwickelten Satz auf einfachere Sätze zurückführen. Diese Kette von Zurückführungen kann nicht endlos sein; sie führt erfahrungsmäßig bald auf gewisse einfache Sätze, die nicht weiter zurückführbar sind. Die Richtigkeit dieser

Sätze gibt jeder zu, welcher ihren Sinn erfaßt hat. Man nennt sie Grundsätze, Axiome.

Unter den Grundsätzen Euklids heben wir hervor: Was zur Deckung miteinander gebracht werden kann, ist einander gleich. Zwei Gerade schließen keinen Raum ein. Unter der Bezeichnung Forderungen: *αἰτήματα*, postulata finden sich bei ihm aber noch zwei Grundsätze: Alle rechten Winkel sind gleich. Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so werden die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte (nach Engel und Staeckel, Die Theorie der Parallellinien, Leipzig, B. G. Teubner 1895).

Dies ist das berühmte Parallelenaxiom. Sein Wortlaut und sein Sinn lassen die Einfachheit und Selbstverständlichkeit der übrigen Axiome nicht entfernt erkennen. Deshalb wurde es zum Ausgangspunkte von Beweisversuchen, die erst im neunzehnten Jahrhundert ihren Abschluß gefunden haben. Die gefundene Lösung zeigte, daß das Parallelenaxiom den übrigen gleichberechtigt gegenübersteht, daß aber statt seiner andere ebenso berechtigte Annahmen zulässig sind. Diese Annahmen führen zu einem völlig widerspruchsfreien Gefüge von Sätzen, die man als nichteuklidische Geometrie bezeichnen kann. Es sei hier auf die Grundlagen der Geometrie von W. Killing verwiesen.

Indes gab diese Antwort auf die zweitausend Jahre alte Frage Anlaß zu neuen und weiteren Forschungen. Man kann jeden mathematischen Satz als einen Bedingungssatz aussprechen und damit die Prüfung der Grundsätze auf ihre Richtigkeit ablehnen. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, von einer beliebigen Sammlung von Sätzen auszugehen, die nur sich nicht gegenseitig enthalten und nicht im Widerspruch miteinander stehen dürfen. Die Gesamtheit der rein logisch aus diesen Sätzen gezogenen Folgerungen könnte man als eine „Geometrie" bezeichnen. Ist die Gesamtheit der Axiome A, $B, \ldots, N$ und lautet ein Satz dieser „Geometrie" a ist b, so würde er sich in den Bedingungssatz umwandeln lassen: Wenn $A, B, \ldots, N$ ist, dann gilt auch: a ist b. Selbstverständlich können nur solche Axiome auf Beachtung Anspruch machen, welche tatsächlich wahr sind oder doch zu tatsächlich wahren Sätzen in Beziehung stehen, und es bleibt dem philosophischen Denken nicht erspart, diese Prüfung der Axiome anzustellen. Für den Bereich der reinen Mathematik kann man die Prüfung ablehnen.

Noch eine weitere Bemerkung muß gemacht werden. Die Schulmathematik legt mit Recht der Anschaulichkeit den höchsten Wert

bei. Daher ist es zweckmäßig, an den Figuren Veränderungen und Bewegungen mancherlei Art auszuführen. Dadurch wird von gewissen Behauptungen Gebrauch gemacht, die man unter Berufung auf die Anschauung als selbstverständlich geltend macht. Damit sind aber stillschweigend Grundsätze eingeführt, und das ist nicht zulässig, wenn man strenge Scheidung zwischen Axiom und Folgerung erzielen will. Man hat diese Scheidung vorgenommen.

Hier ist an erster Stelle Pasch zu nennen, der in seinen Vorlesungen über die neuere Geometrie (B. G. Teubner 1882) acht Grundsätze über die Gerade und vier über die Ebene aufstellt. Besondere Beachtung verdient die Zusammenstellung, welche Hilbert in seinem Buche Grundlagen der Geometrie B. G. Teubner 1903, gegeben hat. Er stellt im ganzen fünf Gruppen von Axiomen auf:

I. Axiome der Verknüpfung, 1—8; z. B. I 1. Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a. I 2. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade. I 6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

II. Axiome der Anordnung, 1—4; z. B. II 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A. II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft. Wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

III. Axiome der Kongruenz, 1—6. Das letzte III 6 sagt, daß zwei Dreiecke in allen entsprechenden Winkeln übereinstimmen, wenn dies in einem Winkel und den ihn einschließenden Seiten der Fall ist. Der erste Kongruenzsatz ist die sofortige Folge dieses Axioms. Ebenso folgt die Gleichheit aller rechten Winkel aus den aufgestellten Axiomen.

IV. Das Parallelenaxiom. Es tritt in der Form auf, daß man durch einen Punkt außerhalb einer Geraden zu ihr nur eine Parallele ziehen kann.

V. Axiome der Stetigkeit, 1—2. Wir heben V 1 hervor. Es besagt, daß eine Strecke $a < b$ durch wiederholtes Abtragen auf b schließlich für eine endliche ganze Zahl n die Ungleichungen erfüllt $na < b$, $(n+1)a > b$, wenn nicht $na = b$. Dies Axiom ist das des Messens und nach Archimedes benannt.

Mit diesen Axiomen kann man die von Federigo Enriques angegebenen zusammenstellen. Ebenso möchte hier auf die Darlegungen der Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber,

Wellstein, Jacobsthal, B. G. Teubner 1905, hingewiesen sein. Für den Schulunterricht kann die Darstellung auf rein logischer Grundlage unmittelbar wenig Einfluß ausüben. Anderseits ist die Bedeutung dieser Forschungen auch für den Unterricht nicht zu unterschätzen. Die Denkschwierigkeiten, welche infolge der Abgezogenheit des Inhalts bei den ersten Grundlagen nunmehr so deutlich hervortreten, rechtfertigen völlig das Verfahren, welches unter Verzicht auf rein begrifflichen Aufbau sich zunächst an die Anschauung wendet. In diesem Sinne sollen nunmehr die Grundeigenschaften der drei Gebilde Punkt, Gerade, Kreis beschrieben werden.

§ 2. Punkt, Gerade, Kreis.

Zwei Punkte A und B bestimmen eine Gerade. Die Entfernung der Punkte A, B wird dargestellt durch die Öffnung des Zirkels, wenn die eine seiner Spitzen in A, die andere in B aufgesetzt ist. Diese Entfernung kann beliebig in der Ebene verlegt werden, z. B. nach CD. Die Entfernung $AB = CD$ ist eine Strecke. Die durch die Punkte A, B gegebene Gerade kann mit Hülfe des Lineals nach zwei Richtungen hin immer noch um eine bestimmte vorher gegebene Strecke verlängert werden. Fassen wir die Strecke AB in den Zirkel, so können wir entweder die in A oder die in B stehende Zirkelspitze als ruhend annehmen und so zu zwei neuen Punkten der Geraden, C und D gelangen. A liegt zwischen C und D, B zwischen A und D. Da dieser Vorgang beliebig wiederholt werden kann, so ist die Gerade als solche unbegrenzt. Dasselbe gilt auch von der Ebene. Zwei beliebige Strecken AB und CD sind immer vergleichbar. Wir können eine derselben, z. B. AB auf der andern in der Richtung von C nach D abtragen. Dann sind nur drei Fälle möglich, von denen sicher einer und nur einer wirklich eintritt:

1) $AB = CD$, B fällt mit D zusammen;

2) $AB > CD$, D fällt zwischen A und B;

3) $AB < CD$, B fällt zwischen A und D.

Die Vergleichung der Strecken ergibt, daß sie den Additionsgesetzen folgen und umgekehrt, daß positive und negative Zahlen durch Streckenabtragung dargestellt werden können.

Eine Gerade teilt die Ebene in zwei voneinander getrennte Teile. Zwei Punkte A und B mögen der Geraden l nicht angehören. Liegen A und B auf derselben Seite der Geraden, so gehört kein Punkt der Strecke AB der Geraden l an, liegen sie auf verschiedenen Seiten, so schneidet die Strecke AB die Gerade l. Diese Eigenschaft

der Geraden wird in ihrer Bedeutung am besten erfaßt durch Anlehnung an die analytische Geometrie. Für Cartesische Koordinaten ist die Gerade gegeben durch die Gleichung ersten Grades $ax + by + c = 0$. Für jeden anderen Punkt (x, y) gibt die linke Seite nicht den Wert 0, sondern entweder einen positiven oder einen negativen reellen Wert. Zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) liegen dann auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden, je nachdem die beiden Ausdrücke $ax_1 + by_1 + c$ und $ax_2 + by_2 + c$ dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben. Dies Verfahren läßt sich sofort auf alle Kurven $F(x, y) = 0$ ausdehnen, für welche $F(x, y)$ ein reeller eindeutiger Ausdruck, vorläufig etwa eine ganze Funktion ist. Jede solche Kurve trennt die Punkte der Ebene in drei Klassen:

$$1)\ F(x, y) > 0; \qquad 2)\ F(x, y) < 0; \qquad 3)\ F(x, y) = 0.$$

Die Gebiete 1) und 2) werden durch 3) getrennt.

Jede Gerade wird durch jeden ihrer Punkte in zwei Halbgeraden oder Strahlen zerlegt. Diese Strahlen haben entgegengesetzte Richtung. Zwei Gerade schneiden sich entweder oder sie schneiden sich nicht. In letzterem Falle sind sie parallel. Durch jeden Punkt A außerhalb der Geraden a kann man zu a nur eine Parallele ziehen. Wenn zwei Gerade sich schneiden, so entstehen vier Winkel. Zwei dieser Winkel, welche eine ihrer Halbgeraden, Schenkel, gemeinsam haben, heißen Nebenwinkel. Winkel, welche von entgegengesetzt gerichteten Strahlen gebildet werden, heißen Scheitelwinkel.

Der Kreis ist diejenige Linie, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte, gleichen Abstand haben. Die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit einem Punkte des Kreises heißt Radius oder Halbmesser. Jede durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten, deren Entfernung Durchmesser heißt. Er ist gleich dem doppelten Radius. Alle Durchmesser eines Kreises sind daher gleich. Zwei willkürliche Punkte des Kreises bestimmen eine Gerade, welche Sekante heißt. Der innerhalb des Kreises (s. u.) liegende Teil der Sekante heißt Sehne. Der Kreis ist eine geschlossene Figur. Statt Kreis sagt man auch Kreislinie, Peripherie.

Der Kreis teilt alle Punkte der Ebene in drei Gebiete. Sei O der Mittelpunkt und ein Strahl OA. Der Radius des Kreises sei r. Dann sind nach Lage des Punktes A auf dem Strahle entweder

$$1)\ OA = r \quad \text{oder} \quad 2)\ OA > r \quad \text{oder} \quad 3)\ OA < r.$$

Die Gebiete von 2) und 3) werden durch 1) getrennt. Die Punkte 2) liegen außerhalb, die Punkte 3) innerhalb des Kreises.

Liegen zwei Punkte *A*, *B* in 2) oder beide in 3), so gilt dasselbe für alle Punkte der Strecke *AB*. Liegt der Punkt *A* innerhalb, *B* außerhalb des Kreises, so gehört ein und nur ein Punkt der Strecke *AB* dem Kreise an.

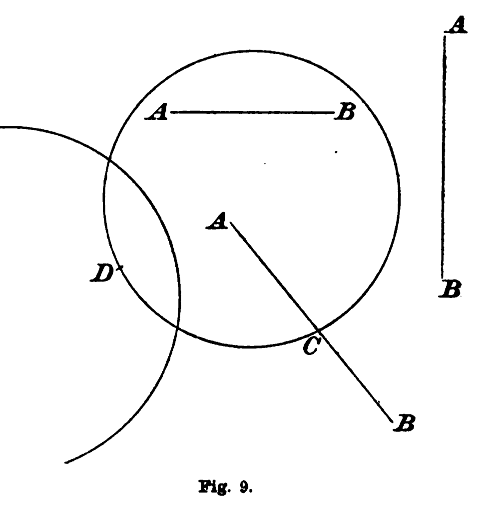


Fig. 9.

Zwei Punkte eines Kreises teilen ihn in zwei Teile, Kreisbögen genannt. Liegt ein Punkt eines Kreises auf einer Seite einer Geraden, ein anderer auf der entgegengesetzten Seite der Geraden, so haben beide Bögen mit der Geraden je einen Punkt gemeinsam.

Für zwei Kreise (Fig. 9) beschränken wir uns vorläufig auf folgende Feststellung. Liegen zwei Punkte eines Kreises *C*, *D* so zu einem zweiten, daß *D* innerhalb, *C* außerhalb des zweiten Kreises ist, dann schneiden beide Bögen des ersten Kreises den zweiten in je einem Punkt.

Ist ein Winkel (Fig. 10) gleich seinem Nebenwinkel, so heißt der Winkel ein rechter. Ein Winkel mit seinem Nebenwinkel macht zwei rechte aus.

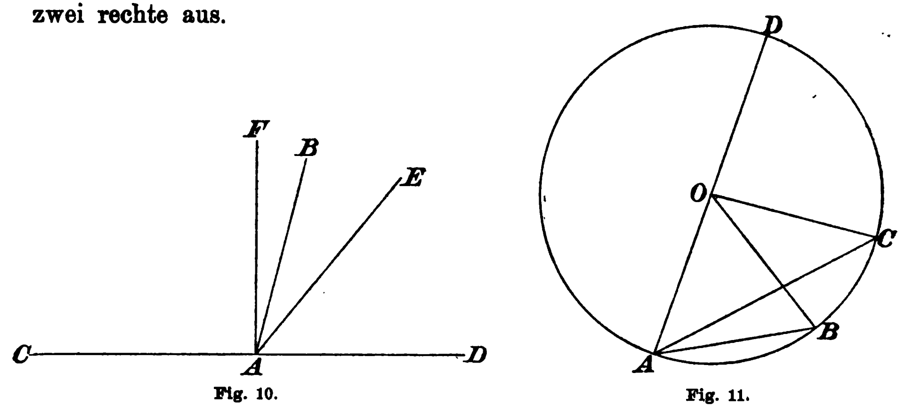


Fig. 10. Fig. 11.

Alle rechten Winkel sind gleich. Dieser Satz ist wissenschaftlich kein Axiom. Indes ist es für die Schule kein Schade, ihn als Axiom aufzustellen oder die Gleichheit der flachen Winkel statt der rechten Winkel geltend zu machen.

Scheitelwinkel sind gleich. Man beweist dies entweder dem Herkommen gemäß oder besser im Anfangsunterricht durch anschauliche Drehung.

Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit zwei Punkten der Peripherie, so entsteht ein Zentriwinkel. Zieht man den Durchmesser (Fig. 11), so kann schon im ersten Unterricht bemerkt werden, daß die Sehne mit dem Zentriwinkel und mit dem Bogen bei Durchlaufung des Halbkreises monoton zunimmt.

§ 3. Die ersten beiden Kongruenzsätze.

1. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Man beweist den Satz durch Aufeinanderlegen und Berufung auf den Grundsatz, daß zwei Punkte eine Gerade eindeutig bestimmen. Will man die Bewegung vermeiden, so ist man genötigt, einen neuen Grundsatz aufzustellen. Dies ist für den Unterricht unzweckmäßig, zumal der Grundsatz, daß die geometrischen Gebilde sich beliebig im Raume bewegen lassen, überaus einleuchtend erscheint.

2. Der Satz vom Außenwinkel.

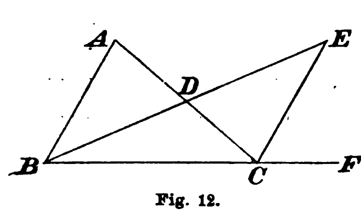
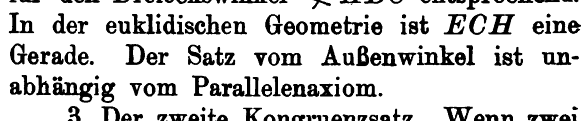


Fig. 12.

Der Außenwinkel ist größer als jeder der beiden innern ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

Sei (Fig. 12) $AD = DC$, $BD = DE$, so ist $\triangle ADB \cong CDE$, also erscheint $\sphericalangle A$ als Teil des Außenwinkels.

E liegt auf entgegengesetzter Seite der Geraden AC wie B und auf derselben Seite der Geraden BC mit A. Daher verläuft EC völlig im Winkelraum ACF. Halbiert man BC in G, zieht $AG = GH$, so folgt der Beweis für den Dreieckswinkel $\sphericalangle ABC$ entsprechend. In der euklidischen Geometrie ist ECH eine Gerade. Der Satz vom Außenwinkel ist unabhängig vom Parallelenaxiom.


Fig. 13.

3. Der zweite Kongruenzsatz. Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent. Sei

$$AB = A'B', \quad \sphericalangle A = A', \quad B = B'.$$

Wir bringen AB mit $A'B'$ und $\sphericalangle A$ mit A' zur Deckung. Fällt dann C' zwischen A und C, so wird $C'BA < CBA$, also $B' < B$, was gegen die Voraussetzung ist.

Sei $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = A'$ und $C = C'$. Wir bringen wieder AB mit $A'B'$ und $\sphericalangle A$ mit A' zur Deckung. Dann ist, wenn C'' zwischen A und C fällt, $\sphericalangle AC''B > ACB$, also $\sphericalangle C' > C$, gleichfalls gegen die Voraussetzung.

Beim Beweise ist wieder von der Bewegung Gebrauch gemacht. Will man sie vermeiden, so sagt man: ich nehme zwischen A und C (oder über C hinaus) eine Strecke $AC'' = A'C'$ an. Dann sind die Dreiecke $C''AB$ und $C'A'B'$ nach dem ersten Kongruenzsatz übereinstimmend. Im übrigen bleibt der Beweis unverändert. Ein neues Axiom ist nicht nötig.

§ 4. Die Symmetriesätze.

Im Dreieck DBC sei $DC = DB$. Die Linie DA, welche $\sphericalangle BDC$ halbiert, zerlegt das Dreieck DBC in zwei symmetrische Teile und ist zu BC senkrecht. Folglich sind die Winkel bei B und C einander gleich. Der Satz ergibt sich auch aus dem Umstande, daß das Dreieck DBC umlegbar ist, also sich selbst nach dem ersten Kriterium kongruent. Der Satz ist umkehrbar. Die Teildreiecke sind dann nach dem zweiten Kongruenzsatz kongruent oder nach demselben Kongruenzsatz das umgelegte Dreieck DBC sich selbst. I n gleichschenkligen Dreiecken sind die Winkel an der dritten Seite gleich und umgekehrt: Sind die einer Seite anliegenden Winkel gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig.

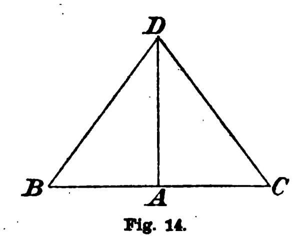


Fig. 14.

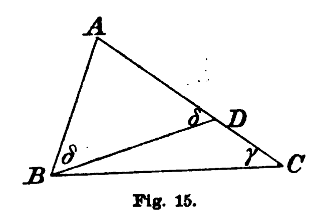


Fig. 15.

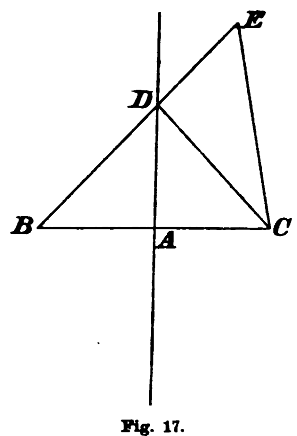
Mit Hülfe dieser Sätze stellen wir im schiefwinkligen Dreieck fest, daß der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt. In Fig. 15 ist $AC > AB$, $AD = AB$ und es folgt $\beta > \delta > \gamma$, also $\beta > \gamma$.

Die Umkehrung wird indirekt bewiesen. In jedem Dreieck ist also das Größenverhältnis zweier Seiten, nämlich $b > c$, $b = c$, $b < c$ auf das Größenverhältnis der Gegenwinkel $\beta > \gamma$, $\beta = \gamma$, $\beta < \gamma$ übertragbar und umgekehrt.

Im gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der dritten

Seite immer spitz. Denn aus Fig. 15 ergibt sich $\sphericalangle BDC > ABD$, also auch $BDC > BDA$, womit der Satz bewiesen ist. Der Satz ist unabhängig vom Parallelenaxiom.

Aus Fig. 15 ergibt sich auch folgendes. Es ist $\sphericalangle \delta > DBC$; folglich noch mehr $\sphericalangle BDC > DBC$. Daraus ergibt sich, daß die Differenz



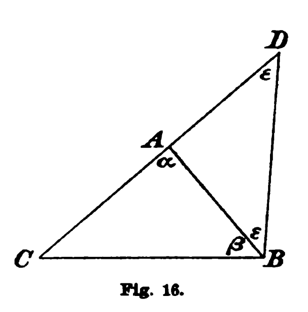


Fig. 16.

Fig. 17.

zweier Dreiecksseiten kleiner ist als die dritte. Denn $DC < BC$. Aus Fig. 16 ergibt sich, indem man $BA = AD$ macht, daß $\beta + \varepsilon > \varepsilon$ (bei D) also nach Übertragung auf die Gegenseite $DC > BC$. Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte.

In Fig. 17 sei $BA = AC$, $DA \perp BC$. Dann hat jeder Punkt der Geraden AD von den Punkten B und C gleichen Abstand (1 K.). Nehmen wir E außerhalb DA, so gilt der Satz, daß E von demjenigen der Punkte B, C den kleineren Abstand hat, mit welchem er auf derselben Seite der Symmetrieachse DA liegt. EB muß DA schneiden (Axiom S. 175). Es ist $DC = DB$, $ED + DC > EC$, also auch $EB > EC$.

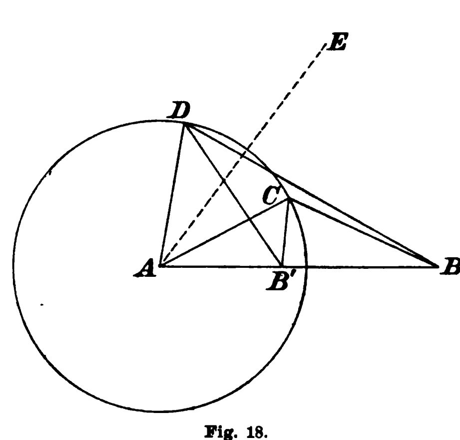


Fig. 18.

Diese Erkenntnis führt nun zu einer sehr folgenreichen weiteren. Sei ein Kreis um A und ein Punkt B gegeben. Wir ziehen die Zentrale AB. Dann nehmen wir zwei Punkte auf der Kreisperipherie an, nämlich D, C und ziehen ihre Symmetrieaxe AE durch Halbierung des Winkels DAC. Dann ist nach dem vorigen erwiesen, daß $BD > BC$.

Der Beweis setzt voraus, daß B nicht im Winkelraum DAC liegt, was der Allgemeingültigkeit nicht schadet. Sei ein Kreis und ein Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises gegeben. Dann wächst die Entfernung des gegebenen Punktes von einem Kreispunkte monoton (gleichsinnig) mit dem Winkel, den der durch den Kreispunkt gehende Radius im Zentrum mit dem durch den festen Punkt gehenden Strahl bildet. Diese Erkenntnis bildet den Satz: **Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, nicht aber in dem von den Seiten gebildeten Winkel, so ist das Größenverhältnis der Winkel auf das der Gegenseiten übertragbar.**

Diese Beziehung ist eindeutig und darum umkehrbar, wenn wir uns auf hohle Winkel beschränken.

§ 5. Die beiden letzten Kongruenzsätze.

Aus dem Schlußsatze des vorigen Paragraphen ergibt sich alsbald ein Beweis für die Kongruenz der Dreiecke, welche in den drei Seiten übereinstimmen. Wir legen die Dreiecke DEF und ABC aufeinander, wie dies Fig. 19 andeutet. Wäre nun $\sphericalangle ABC \neq DEF$ und etwa $\sphericalangle ABC < DEF$, so würde die Symmetrale der Punkte D, A die Punkte A, C von dem Punkte D trennen. Es wäre also $DC > AC$, also $DF > AC$, im Widerspruch mit der Annahme, daß die Dreiecksseiten entsprechend gleich sein sollen.

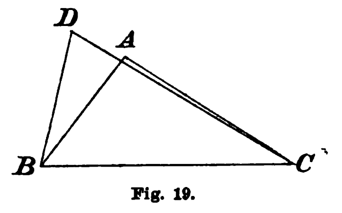


Fig. 19.

Ein zweiter Beweis ergibt sich, wie Fig. 20a, 20b, 20c zeigt, durch Aneinanderlegen der Dreiecke ABC und DEF. Bei diesem Beweise ergibt die Methode der Winkelberechnung aus den gleichschenkligen Dreiecken ABD und ACD, daß $\sphericalangle BAC = BDC = \delta + \varepsilon$ ist und daher Kongruenz der Dreiecke nach dem ersten Kongruenzsatz. Bei diesem Beweisgange sind drei Fälle zu unterscheiden, die in den Figuren 20a, 20b, 20c angedeutet sind. Für den ersten Unterricht hat dieser Beweis vor dem ersten Vorzüge; auch tut man gut, die Dreiecke mit den größten Seiten aneinander zu legen, wobei allerdings eine Beweislücke bleibt.

Der dritte Kongruenzsatz ist der Hauptsatz für alle Maßbeziehungen. Die Konstruktionen, welche wir bisher nur denken konnten, d. h. deren Möglichkeit wir durch besondere Axiome feststellten, werden nun wirklich ausführbar, d. h. wir können mit Zirkel und Lineal geometrische Figuren zeichnen, welche den geometrischen Wahrheiten als Anschauungsbilder zugeordnet sind. Daher muß sich

der Gedanke einstellen, ob nicht der dritte Kongruenzsatz als Axiom an die Spitze der ganzen Geometrie gesetzt werden soll. Wir wüßten

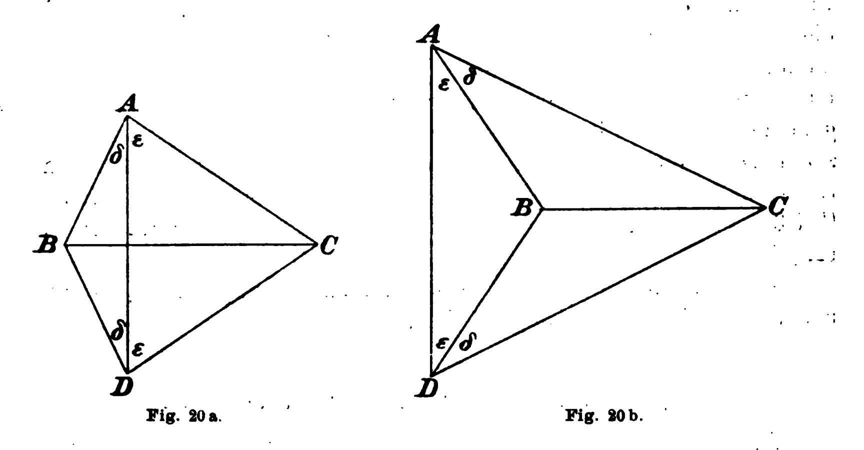


Fig. 20a. Fig. 20b.

keinen sachlichen Gegengrund anzuführen. Ein Schönheitsfehler ist es allerdings, daß dieser Grundsatz nicht einfach genug erscheint. Dieser Schönheitsfehler kann uns aber nicht abhalten, beim ersten Unterricht von dem dritten Kongruenzsatz wie von einem Grundsatz auszugehen. Es werden dann alle im folgenden Paragraphen vorkommenden Konstruktionen ausführbar und der Lernende wird in der Geometrie sofort zur Selbsttätigkeit geführt. Verstärkend kommen für diesen Ausgangspunkt historische Gründe in Betracht. Zweifellos verdankt die Geometrie ihren Ursprung und ihre erste Entwicklung denjenigen Gedankenreihen, welche sich an sorgfältig angestellte und tatsächlich ausgeführte Messungen anschlossen.

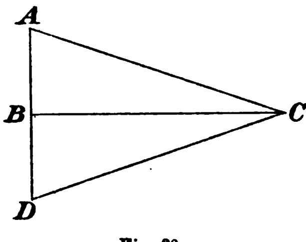


Fig. 20c.

Der letzte Kongruenzsatz kommt fast nur in seiner Anwendung auf das rechtwinklige Dreieck vor. Er erschließt die Kongruenz aus der Gleichheit einer Kathete und der Hypotenuse. Wir legen nach Fig. 20c die beiden Dreiecke mit der gleichen Kathete aneinander. Die andern Katheten bilden dann die gerade Linie ABD und das Dreieck ADC ist gleichschenklig. Dann sind die beiden Dreiecke ABC und DBC nach dem zweiten Kongruenzsatz deckend.

Für den allgemeinen Fall sei $BC = EF$, $\sphericalangle BAC = EDF$, $BA = BD$ und $BA < BC$. Wir legen die Dreiecke aneinander, schließen aus der Gleichheit der Seiten BA und BD auf Gleichheit der Winkel δ und dann durch Subtraktion des δ von A und D

$\sphericalangle A - \delta = D - \delta = \varepsilon$; endlich auf $AC = DC$. Die Dreiecke sind also nach dem dritten Kongruenzsatz deckend.

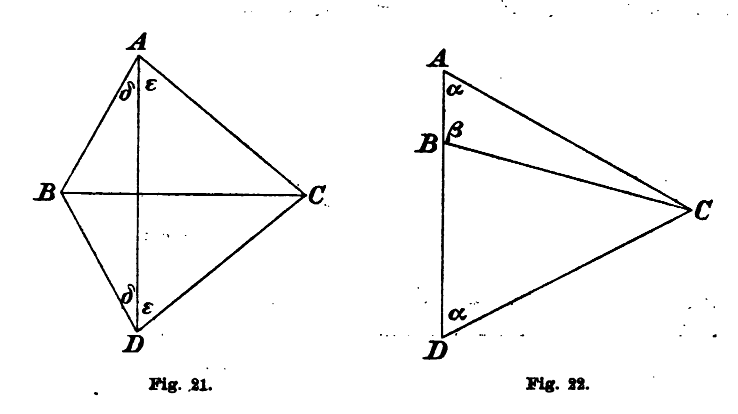


Fig. 21. Fig. 22.

Eine Schwäche dieses Beweises liegt in der beweislosen Annahme, daß ein Dreieck ABD wirklich entsteht. Die Lücke kann leicht ergänzt werden. Wenn nämlich (Fig. 22) ABD eine gerade Linie wäre, so wäre für $\triangle BDC$ als Außenwinkel $\beta > \alpha$, folglich für $\triangle ABC$ wäre $AC > BC$ gegen die Annahme.

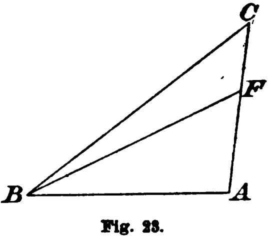


Fig. 23.

Ein anderer allgemeiner Beweis ist in Fig. 23 angedeutet. Wir legen die Dreiecke mit den kleineren gleichen Seiten aneinander, also ED auf BA. Dann fällt F auf die Gerade AC, weil $\sphericalangle EDF = BAC$. Fiele F nicht auf C, sondern etwa zwischen A und C, so wäre $\sphericalangle BFC = BCF$ und, weil $BFC > BAF$, so wäre auch $\sphericalangle BCA > BAC$, also $BA > BC$, gegen die Voraussetzung.

§ 6. Die grundlegenden Konstruktionsaufgaben.

Der dritte Kongruenzsatz ist vorhin als der Hauptsatz für alle Maßbeziehungen hingestellt worden. Dies bewährt sich im folgenden.

1. Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten die vorgeschriebenen Längen a, b, c haben.

Die Lösung erfordert Abtragung einer der drei Strecken a als BC und Zeichnung der Kreise um B mit c, um C mit b.

Die Möglichkeitsbesprechung erfordert die vollständige Erörterung der Lagen zweier Kreise. Sei $BC = c$, $AC = CD = \varrho$.

Da (Fig. 25) $BA < BE < BD$, so wird ein um B mit dem Radius r beschriebener Kreis den um C mit ϱ beschriebenen nicht schneiden, wenn $r < BA$, also $r + \varrho < c$, oder wenn $r > BD$, also

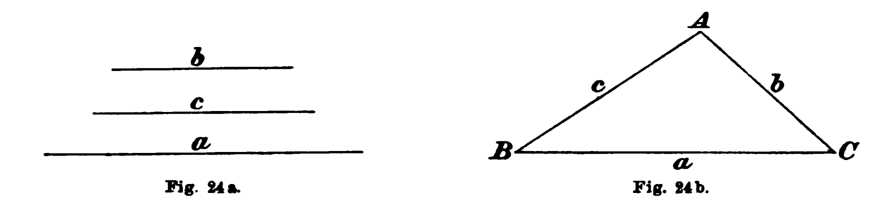


Fig. 24a. Fig. 24b.

$r > c + \varrho$ ist. Es muß also die Summe der Radien größer als die Zentrale und die Differenz der Radien kleiner als die Zentrale sein.

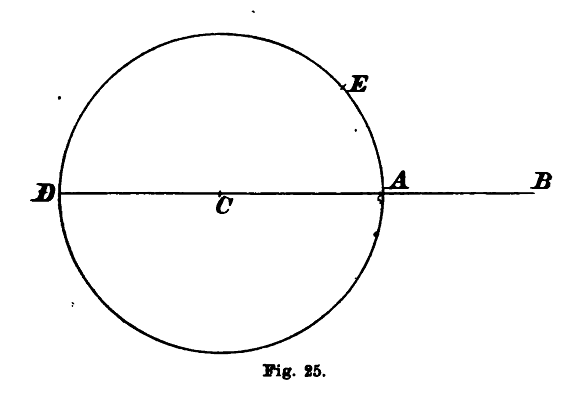


Fig. 25.

Liegt B innerhalb des Kreises C, so ist das Ergebnis dasselbe. Sind beide Bedingungen erfüllt, so ist die Aufgabe lösbar. In den Grenzlagen $BA = r$, $BD = r$, also $c = r + \varrho$ oder $c = r - \varrho$ entsteht kein eigentliches Dreieck. In diesen Fällen berühren die Kreise einander. Wir haben darüber weiter unten zu handeln.

2. In einem gegebenen Punkte an eine gegebene Gerade einen gegebenen Winkel anzulegen.

Die Aufgabe wird auf die vorige zurückgeführt, indem man zwei beliebige Punkte auf den Schenkeln des gegebenen Winkels zu einem Dreieck verbindet.

3. Ein Dreieck zu zeichnen aus b, c, α.

4. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, β, γ.

5. Eine gegebene Strecke zu halbieren.

Die Strecke sei BC. Wir beschreiben um B und C mit hinlänglich großem Radius zwei gleiche Kreise, die sich in D und E schneiden mögen.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir die Begriffe der Geometrographie kurz erörtern. Anlegen des Lineals an einen Punkt bezeichnen wir durch R_1, Anlegen des Lineals an zwei Punkte durch $R_1 + R_1 = 2R_1$; Ziehen der Geraden durch R_2. Ferner bezeichnen wir das Einsetzen einer Zirkelspitze durch C_1, das der zweiten durch

$C_1 + C_1 = 2C_1$, das Beschreiben des Kreises durch C_2. Dann kann jede mathematische Konstruktion abgezählt werden als:

$$K = aR_1 + bR_2 + cC_1 + dC_2.$$

Die Zeichen a, b, c, d bedeuten ganze Zahlen und die Summe

$$S = a + b + c + d$$

gibt den Einfachheitsgrad der Zeichnung an. Unsere Konstruktion der Aufgabe 5. stellt sich also so dar:

$$K = C_1 + C_2 + C_1 + C_2 + R_1 + R_1 + R_2,$$
$$K = 2R_1 + 2C_1 + 2C_2 + R_2.$$
$$S = 2 + 2 + 1 + 1 = 6 \quad \text{(2 Kreise, 1 Gerade).}$$

6. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu errichten.

Der Punkt sei A, die Gerade a. Wir beschreiben um A mit willkürlichem Radius einen Kreis ($C_1 + C_2$), welcher a in den Punkten B, C schneiden möge, beschreiben um B, C mit hinlänglich großem Radius zwei gleiche Kreise ($2C_1 + 2C_2$), die sich in D schneiden mögen, verbinden D mit A ($2R_1 + R_2$). Es ist also $S = 9$ (3 Kreise, 1 Gerade).

7. Von einem gegebenen Punkte auf eine ihn nicht enthaltende Gerade eine Senkrechte zu fällen. $S = 9$ (3 Kreise, 1 Gerade).

8. Einen gegebenen Winkel zu halbieren. $S = 9$ (3 Kreise, 1 Gerade). Dieser landläufigen Konstruktion kann man eine zweite gegenüberstellen. Der Scheitelpunkt heiße A. Wir beschreiben um A mit zwei willkürlichen, aber ungleichen Radien zwei Kreise, welche den einen Schenkel in B_1, B_2, den anderen in C_1, C_2 schneiden, ziehen B_1C_2 und C_1B_2, verbinden den Schnittpunkt mit A. $S = 12$ (2 Kreise, 3 Gerade).

Die Aufgabe gibt uns die Möglichkeit, Winkel von beliebiger Kleinheit zu zeichnen. Damit sind wir aber imstande, ein Winkelmaß einzuführen.

Dem Gange des Unterrichts, wie ihn die bisherigen Erörterungen als naturgemäß zeigen sollten, entspricht es, an dieser Stelle möglichst viele Winkel, besonders Dreieckswinkel mit Hülfe des geteilten Kreises ausmessen und dann nach Augenmaß abschätzen zu lassen. Gerade diese Übung verhilft zur Aneignung des Winkelbegriffs.

9. Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel; a, b, α.

Wir legen den Winkel hin, nennen den Scheitel A, tragen auf dem einen Schenkel ein Stück gleich b mit dem Endpunkt C ab und beschreiben um C mit a als Radius einen Kreis.

Die Möglichkeitsbetrachtung nötigt zur Entwicklung der Sätze über Kreis und Gerade.

Lehrsatz. Die Senkrechte ist die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

Sei (Fig. 26) $AB \perp CD$, AC nicht senkrecht. Wir machen $BC = BD$, dann wird durch Kongruenz $AD = AC$, also $\sphericalangle ACD$ spitz, also $\sphericalangle ACB < ABC$, also $AC > AB$.

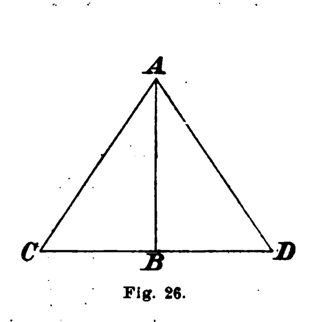


Fig. 26.

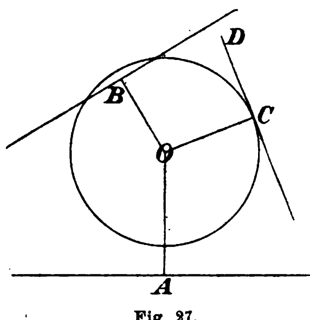


Fig. 27.

Die Geraden der Ebene zerfallen durch einen in der Ebene gezeichneten Kreis in drei Klassen. Wir fällen auf eine beliebige Gerade vom Mittelpunkt des Kreises eine Senkrechte mit der Länge a, und dann ist $a > r$ oder $a < r$ oder $a = r$. Im ersten Falle (Fig. 27) schneidet die Gerade den Kreis nicht, im zweiten in zwei Punkten, im dritten berührt sie ihn.

Erklärung. Eine Gerade, welche mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat, während alle übrigen Punkte außerhalb des Kreises liegen, heißt Tangente des Kreises.

Lehrsatz. Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreises einen willkürlichen Strahl und errichtet im Schnittpunkte des Strahles mit dem Kreise eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte eine Tangente des Kreises.

Der Beweis ist in dem Nachweis $OD > OC$ geliefert. Nunmehr kann die Besprechung der Aufgabe 9. durchgeführt werden. Ist $a > b$, so entsteht nur eine eigentliche Lösung, das Dreieck ist eindeutig bestimmt. Für $a = b$ ist ein uneigentliches und ein gleichschenkliges Dreieck als Lösung vorhanden. Es muß α spitz sein. Für $a < b$ fällt man von C auf den freien Schenkel eine Senkrechte mit der Länge l. Ist $b > a > l$, so erhalten wir zwei, ist $b > a = l$, eine, ist $b > a$, $a < l$, so erhalten wir keine Lösung.

Die Beziehungen des Kreises zur Geraden führen nun weiter zu der Satzgruppe über die Sehnen.

Die Verbindungslinie der Sehnenmitte mit dem Mittelpunkt des Kreises steht auf der Sehne senkrecht. Der Satz hat zwei Umkeh-

rungen und ist geeignet, in logischem Aufbau vorgelegt zu werden. Wir bezeichnen:

A = die Gerade geht durch den Kreismittelpunkt,
B = „ „ „ „ „ Mittelpunkt der Sehne,
C = „ „ steht senkrecht auf der Sehne.

Nun heißen die drei Sätze:

1) Wenn A und B ist, so folgt C;
2) „ A „ C „ „ „ B;
3) „ B „ C „ „ „ A.

Der dritte Satz heißt in Worten: Die auf der Sehnenmitte errichtete Senkrechte geht durch den Kreismittelpunkt. Der Beweis wird indirekt geführt. Wir erhalten durch diesen Satz die Möglichkeit, zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden und zwar mit Hülfe einer oder zweier nichtparallelen Sehnen. Fügt man noch die Bestimmungen hinzu:

D = die Gerade halbiert den zur Sehne gehörenden Zentriwinkel,
E = „ „ „ „ „ „ „ Kreisbogen,

so kann man im logischen Schema beifügen:

Wenn D ist, so ist A, B, C, E.

Ferner kann man noch E zu irgend einem der A, B, C hinzunehmen. Mathematische Bedeutung haben diese Sätze nicht. Auch für Tangente und Kreismittelpunkt kann man das entsprechende logische Schema aufstellen.

Der Satz: Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen und Zentriwinkel wird durch Aufeinanderlegen bewiesen. Die Einwendungen gegen diese Schlußweise sind durch unsere Bemerkungen § 1 gewürdigt. Für den Unterricht ist Bewegung nicht zu entbehren.

Die Vergleichung der Winkel führt zur Vergleichung der ihnen als Zentriwinkel zugeordneten Kreisbögen. Den Winkel durch einen geteilten Kreis zu messen, sind wir nach diesen Betrachtungen berechtigt. Die Teilung des Vollwinkels in 360°, des rechten in 90° ist künstlich. Mit Zirkel und Lineal kann man alle Winkel konstruieren, deren Gradzahl durch 3 teilbar ist. Einen Winkel durch eine Zahl zu messen, wird uns erst an späterer Stelle möglich.

Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel, also in a und α übereinstimmen, so hat das Größenverhältnis $b_1 > b$ das Größenverhältnis $c_1 < c$ zur Folge. Der Satz wird durch Aneinanderlegen der Dreiecke mit den Strecken BC auf B_1C_1 bewiesen. Er gilt nicht, wenn $\sphericalangle\, C_1 + C = 180^\circ$. Der Satz wird gewöhnlich

für rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Hypotenuse ($\alpha = 90^0$) ausgesprochen. Dann gilt er ausnahmslos. In dieser Form führt er zu dem Satze, daß eine Sehne um so größer ist, je kleiner ihre Entfernung vom Kreismittelpunkt ist.

Zwei Kreise berühren einander, wenn $c = r + \varrho$ oder $c = r - \varrho$ ist, s. o. S. 184. Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so haben die Kreise einen und nur einen Punkt gemeinsam. Im ersteren Falle liegt jeder andere Punkt des einen Kreises außerhalb des andern Kreises, im letzteren liegt jeder Punkt des kleineren Kreises innerhalb des größeren. Die Kreismittelpunkte liegen in einer Geraden mit dem Berührungspunkte. Im Berührungspunkte besitzen die Kreise eine gemeinsame Tangente.

Beim ersten Unterricht empfiehlt es sich, diese Eigenschaften aus der Anschauung zu entwickeln. Die Beweise schließen sich an die Betrachtungen des § 4 an und können unter anderm Gesichtspunkt an die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise angefügt werden.

§ 7. Der Parallelismus.

Die in einer Ebene liegenden Geraden können sich schneiden oder nicht. Im ersteren Falle haben die Geraden nur einen Punkt gemeinsam. Fassen wir nun den Fall des Nichtschneidens ins Auge. Die Aussage: „Zwei Gerade schneiden sich nicht“ ist einstweilen rein logisch, ein kontradiktorisches Urteil zu: „Zwei Geraden schneiden sich“. Um der Aussage einen positiven Sinn beizulegen, betrachten wir den Fall der Kugelfläche.

Sobald wir die Frage nach dem Schneiden zweier Hauptkreise stellen, erhalten wir eine grundverschiedene Antwort: Zwei beliebige Hauptkreise schneiden sich immer in zwei Punkten. Nichtschneiden kommt also bei den auf der Kugel den geraden Linien der Ebene entsprechenden Hauptkreisen nicht vor. Hiernach dürfen wir erwarten, daß auch in der Ebene für das Nichtschneiden der geraden Linien irgend eine positive Aussage bestehen muß. Diese Aussage ist nun das Parallelenaxiom (P. A.). Wir geben ihm die Form:

Wenn eine Gerade a und ein Punkt A außerhalb a gegeben ist, so gibt es nur eine einzige Gerade, welche durch A geht und a nicht schneidet.

Jede andere durch A gehende Gerade schneidet also a und zwar in endlicher Entfernung von A. Die nichtschneidende Linie nennen wir die Parallele zu a und wir bedürfen noch eines positiven Merkmals zu ihrer Kennzeichnung. Wir fällen von A auf a eine Senk-

rechte AB, dann in A errichten wir wieder eine Senkrechte zu AB und behaupten, diese Gerade könne a nicht schneiden. Der Beweis gelingt indirekt. Nehmen wir an, die Gerade schnitte a etwa rechts vom Beschauer in C. Dann würde sie auch links vom Beschauer in D schneiden müssen. Genau derselbe Beweis gilt, wenn wir durch A statt der Senkrechten zu a eine beliebige Schräge ziehen und nur sorgen, daß die Summe der Innenwinkel $\alpha + \beta$ gleich zwei Rechten wird. Unser P. A. sagt dann aus, daß jede durch A' gehende Schräge die Gerade a schneiden muß, wenn die Summe der Innenwinkel bei A' und B' kleiner ist als zwei Rechte. Hiermit haben wir dann nahezu den Wortlaut der Fassung, welche der Altmeister Euklides seinem Axiom gegeben hat. Das Axiom ist in jeder Fassung nicht so einfach einleuchtend, wie die anderen Axiome und erscheint künstlicher. Daß diese Kennzeichnung in der Euklidischen Fassung besonders kenntlich hervortritt, ist vielleicht bewußte Absicht, jedenfalls für die Entwicklung der Forschung höchst förderlich gewesen.

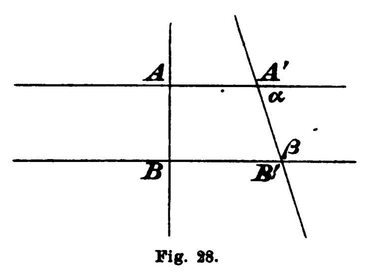


Fig. 28.

An Versuchen, das P. A. als eine Folge der übrigen Axiome abzuleiten, hat es nicht gefehlt und es ist für den Anfänger keineswegs weggeworfene Zeit, wenn er die vielen vergeblichen Versuche um einen für ihn neuen vermehrt. Am einfachsten dürfte folgender Weg scheinen. Wir errichten in A und B die gleichen Senkrechten $DA = EB$ und ziehen DE. Dann ist $DABE \cong EBAD$, also sind die $\sphericalangle\, \alpha$ bei D und E einander gleich. Nun sind drei Annahmen

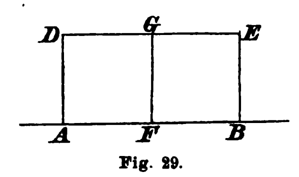


Fig. 29.

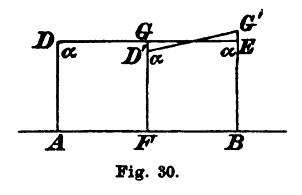


Fig. 30.

möglich. 1. $\alpha = 90^0$. Dies führt zum P. A. und damit zur gewöhnlichen Euklidischen Geometrie. 2. $\alpha > 90^0$. Die Winkel des Vierecks betragen dann zusammen mehr als 360^0. Wir erhalten die Geometrie auf der Kugelfläche. 3. $\alpha < 90^0$. In dieser Annahme steckt die „imaginäre“ Geometrie Lobatschewskijs.

Sei $AF = FB$ und $GF \perp AB$, so ist $DAFG \cong EBFG$, also $FG \perp DE$. Nun verschieben wir $DAFG$, bis A in die Lage von F kommt, F in die Lage B. Dann fällt AD in die Richtung FG,

FG in die Richtung BE. Fällt D mit G zusammen, so fällt auch G mit E zusammen, also $\alpha = 90^0$. Dies widerspricht der Voraussetzung. Fällt D zwischen F und G, so ist $DA < FG$, also auch $BE < FG$ und Fig. 30 zeigt α als Außenwinkel zu 90^0. Auch dies ist gegen die Voraussetzung. Es muß also angenommen werden $FG < AD$. Somit haben wir eine Gerade DGE, welche die Gerade AFB nicht schneidet, aber so zu ihr liegt, daß der senkrechte Abstand ihrer Punkte von AB in D und E derselbe, in G aber kleiner ist, als in D und E. Das ist eine unserem natürlichen Empfinden widersprechende Vorstellung. Sobald wir aber versuchen, dies Empfinden in geometrische Begriffe zu übertragen, begegnen wir dem Ausspruch: Zwei in der Ebene liegende, nicht schneidende Gerade haben überall gleichen Abstand. Und dieser Ausspruch ist keineswegs der obigen Fassung des P. A. vorzuziehen. Vielmehr müssen wir gegen den Ausspruch den Tadel geltend machen, daß alle Punkte der zweiten Geraden von der ersten gleichen Abstand haben, wenn dies für nur drei Punkte feststeht.

Im übrigen muß bezüglich des P. A. auf das fachwissenschaftliche Schrifttum hingewiesen werden, besonders auf das treffliche Werk von W. Killing, Grundlagen der Geometrie.

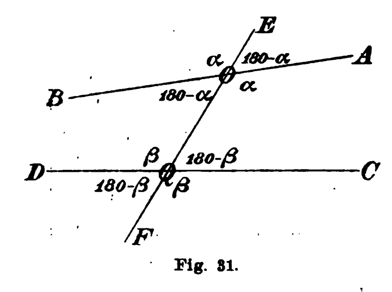


Fig. 31.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen im ganzen acht Winkel. In kurzer Bezeichnung haben wir sie Fig. 31 dargestellt. Man unterscheidet meist drei Winkelpaare, indem man vom Standpunkte des Beschauers aus bei der schneidenden Geraden rechts und links, bei den geschnittenen oben und unten unterscheidet.

1. Entsprechende Winkel, d. h. solche auf gleichnamiger Seite der schneidenden und der geschnittenen:

$$\sphericalangle EOA \text{ und } EQC; \quad EOB \text{ und } DQF \text{ usw.}$$

2. Ergänzungswinkel, d. h. solche auf gleichnamiger Seite der schneidenden und ungleichnamiger der geschnittenen, also

$$AOQ \text{ und } CQO; \quad BOQ \text{ und } DQO.$$

3. Wechselwinkel, d. h. solche auf ungleichnamiger Seite der schneidenden und ungleichnamiger der geschnittenen, also

$$AOQ \text{ und } DQO; \quad EOA \text{ und } DQF.$$

4. Verschränkte Winkel, d. h. solche auf gleichnamiger Seite der geschnittenen und ungleichnamiger der schneidenden. Diese Winkel-

paare kommen in den Anwendungen nicht vor und sind nur der systematischen Vollständigkeit wegen erwähnt.

Die ersten drei Winkelpaare sind dagegen allgemein im Gebrauch und geben drei Kennzeichen des Parallelismus:

Zwei Gerade sind parallel, wenn entweder ein Paar entsprechender Winkel gleich ist oder ein Paar Ergänzungswinkel zusammen 180^0 ausmacht oder ein Paar Wechselwinkel gleich ist.

Der Beweis ergibt sich wie oben indirekt. Wenn OA und QC (Fig. 32) sich rechts vom Beschauer schneiden, so muß dasselbe links geschehen. Der Beweis gilt für jede der möglichen $4 \cdot 4 = 16$ Annahmen in entsprechender Zuordnung der vier bei O und Q liegenden Winkel. Es ist dringend zu raten, an dieser Stelle den Anfänger nicht durch breite Ausführlichkeit zu ermüden.

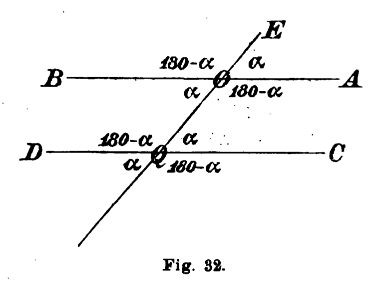


Fig. 32.

Obigen drei Kennzeichen des Parallelismus stehen drei Umkehrungen gegenüber. Wenn zwei Gerade parallel sind, werden sie von einer beliebigen dritten so geschnitten, daß jedes Paar entsprechender Winkel gleich ist usw.

Der Beweis gelingt indirekt. Wenn (Fig. 32) $OA \parallel QC$, aber $\sphericalangle EOA \neq OQC$, so kann man durch O einen Strahl OA' so ziehen, daß $EOA' = OQC$ ist. Dann gehen durch O zu QC zwei Parallele, was dem P. A. widerspricht.

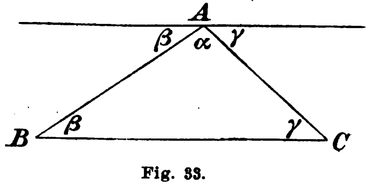


Fig. 33.

Nunmehr können wir an die Bestimmung der Winkelsumme des Dreiecks, Vierecks usw. gehen. Man verfährt am einfachsten nach der allbekannten Methode, welche Fig. 33 andeutet. Ist die Winkelsumme des Dreiecks bestimmt, so

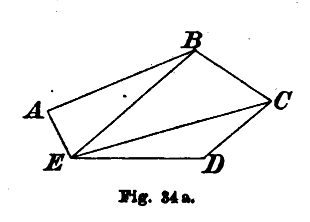


Fig. 34a.

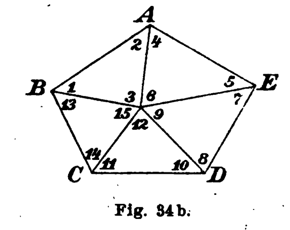


Fig. 34b.

kann man die des Vierecks, Fünfecks usw. folgen lassen. Man verfährt dabei, wie die Figuren 34a und 34b für das Fünfeck andeuten.

Letztere Methode hat den Vorzug größerer Einheitlichkeit und führt für das n-Eck sofort zu der Formel:

$$\Sigma A = n \cdot 180 - 360 = 180(n-2).$$

Hierauf wird man die gewonnenen Hülfsmittel auf die Kreislehre anwenden.

Wir begegnen hier der Satzgruppe über Zentriwinkel und Peripheriewinkel (Mittelpunkts- und Umkreiswinkel).

In den Figuren erscheint der Mittelpunktswinkel als 2α, $2(\alpha+\beta)$, $2(\alpha-\beta)$, während die zugehörigen Umkreiswinkel α, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ sind. Es folgt der Satz:

Der Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß wie der Umkreiswinkel, welcher mit ihm über demselben Bogen steht.

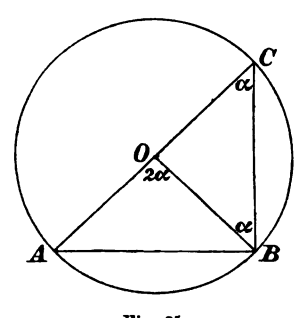


Fig. 35 a.

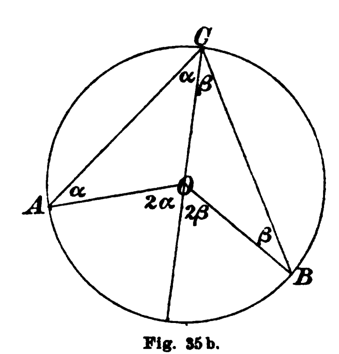


Fig. 35 b.

Eine Folgerung ist der Satz:

Umkreiswinkel über demselben Bogen sind gleich.

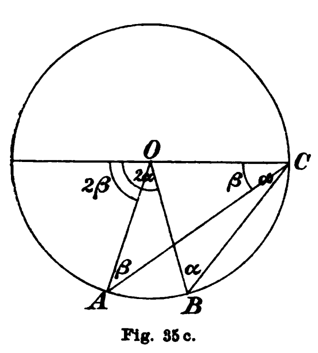


Fig. 35 c.

Dieser Satz ist einer Umkehrung fähig. Sie heißt:

Gleiche Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, haben als geometrischen Ort der Scheitel einen Kreisbogen, dessen Mittelpunktswinkel doppelt so groß ist als der bewegliche Winkel.

Der Satz bleibt richtig, wenn der bewegliche Winkel stumpf ist. Der Mittelpunktswinkel ist in diesem Falle erhaben.

Die beiden vorhin ausgesprochenen Sätze faßt der Satz vom Kreisviereck zusammen:

Die Summe der gegenüberliegenden Winkel in einem Kreisviereck beträgt 180°.

Der Satz setzt stillschweigend voraus, daß die Sehnen sich nicht kreuzen. Es ist zweckmäßig, den Satz noch auf eine andere Art zu beweisen. Man verbinde die vier Ecken mit dem Kreismittelpunkt

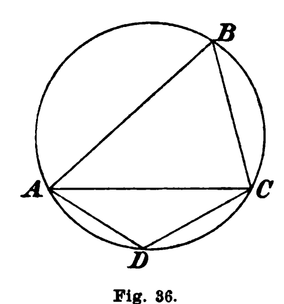


Fig. 36.

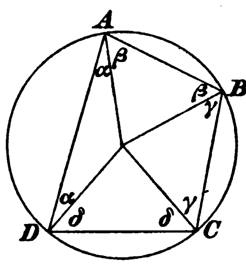


Fig. 37.

und verfahre dann, wie dies Fig. 37 andeutet, nach der Methode der Winkelberechnung. Es ergibt sich

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^0,$$

also:

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180^0.$$

Der Beweis ist besonders im Anfangsunterricht sehr zu empfehlen.

Die Umkehrung des Satzes heißt: Wenn in einem Viereck, dessen Seiten sich nicht kreuzen, die Summe zweier Gegenwinkel 180^0 beträgt, so ist das Viereck ein Kreisviereck.

Der Beweis wird schulmäßig am besten indirekt geführt. Zum Verständnis ist die Betrachtung der zwei Seiten der Sekante nützlich. Die Gerade AB (Fig. 38) zerlegt die Ebene in zwei getrennte Gebiete, die wir das obere und untere nennen wollen. Das obere Gebiet wird durch die Kreislinie wieder in zwei Gebiete getrennt, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb des oberen Kreisteils liegt. Für innere Punkte C ist $\sphericalangle ACB > \alpha$, für äußere $\sphericalangle ACB < \alpha$. Ebenso teilt die Kreislinie das untere Gebiet, aber für innere Punkte ist

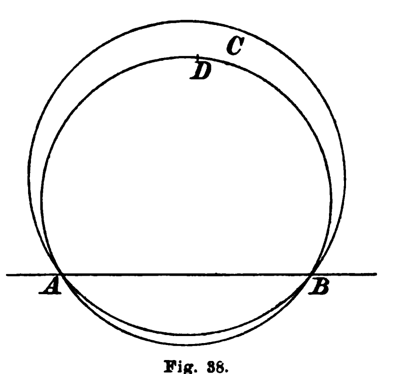


Fig. 38.

$$\sphericalangle ACB > 180 - \alpha,$$

für äußere

$$\sphericalangle ACB < 180 - \alpha.$$

Legt man durch AB eine Reihe von Kreisen, die ihre Mittelpunkte alle auf derselben Seite von AB haben, so zerfällt die Ebene in eine Reihe von Zweiecken, für welche die innerhalb eines Zweiecks gelegenen Punkte C die Bedingung erfüllen: $\alpha > ACB > \beta$, wenn α und β den das Zweieck begrenzenden Bögen angehören.

Bemerkenswert (Fig. 39) ist besonders der Pfeilpunkt C und der Gegenpfeilpunkt D einer Sehne AB. Beschreibt man mit CA um C einen Bogen oberhalb AB, so faßt er den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, während der um D mit AD oberhalb AB beschriebene Bogen $90 + \frac{\alpha}{2}$ faßt.

Noch ist wichtig für Aufgabenlösung die Bemerkung, daß von gleichen Umkreiswinkeln in demselben Kreise gleiche Sehnen gespannt werden. Der Beweis ergibt sich (Fig. 40) durch Herstellung der den Sehnen zugehörigen Mittelpunktswinkel.

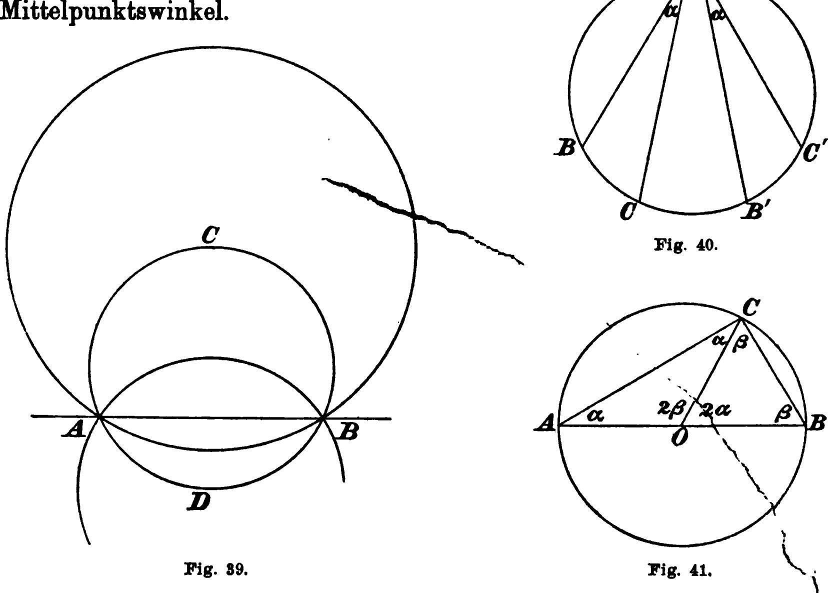


Fig. 40.

Fig. 39.

Fig. 41.

Der besondere Fall des Halbkreises ist schon seiner historischen Bedeutung (Satz des Thales) wegen hervorzuheben. Der Beweis gelingt (Fig. 41) durch Winkelberechnung. Für den Mittelpunktswinkel ergibt sich $2\alpha + 2\beta = 180^0$, daher für den Umkreiswinkel $\alpha + \beta = 90^0$. Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Nunmehr können wir uns mit der Aufgabe beschäftigen, von einem gegebenen Punkte aus eine Tangente an einen gegebenen Kreis zu ziehen. Fig. 42 zeigt die jetzige Schullösung. Es wird über der Verbindungslinie des äußeren Punktes B mit dem Kreismittelpunkte A

ein Halbkreis beschrieben, welcher den Kreis im Berührungspunkte C der gesuchten Tangente BC schneidet.

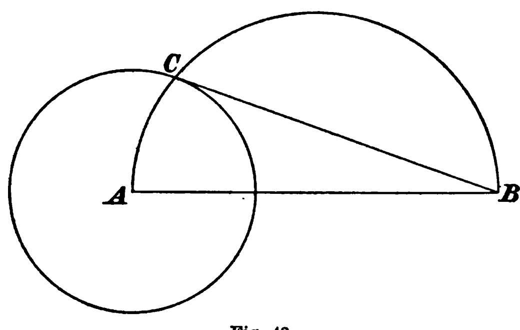


Fig. 42.

Eine zweite Lösung zeigt Fig. 43. Es ist um A mit AB ein Kreis beschrieben und im willkürlichen Punkte C des gegebenen Kreises $DC \perp AC$ gezogen.

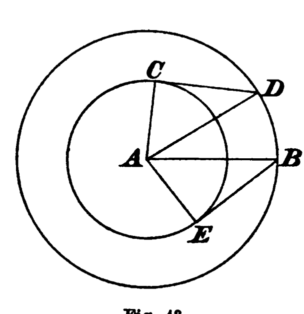


Fig. 43.

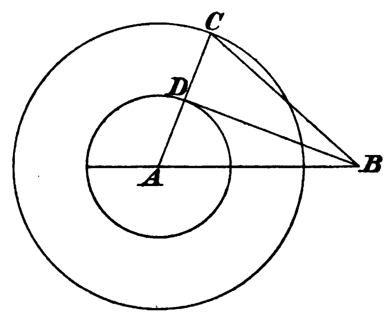


Fig. 44.

Die dritte Lösung (Fig. 44) macht $AC = 2r$, $BC = AB$.

Beschreibt man um B einen Kreis mit dem Radius ϱ (Fig. 45) und vergrößert zugleich r um ϱ, so geht die Tangente BC parallel mit ihrer ursprünglichen in die Lage DE über und ist dann gemeinsame äußere Tangente der beiden Kreise A und B.

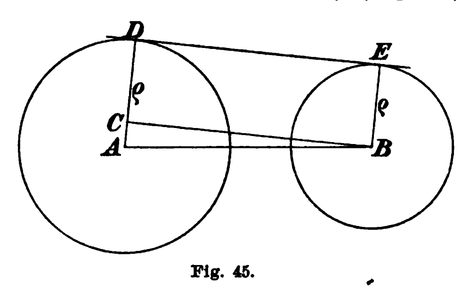


Fig. 45.

Beschreibt man um B mit ϱ einen Kreis (Fig. 45) und verschiebt die Tangente BC in der Richtung von C nach A um ϱ, so erhält man die gemeinsame innere Tangente der Kreise A und B.

Hiermit ist die wichtige Aufgabe gelöst, an zwei gegebene Kreise gemeinsame Tangenten zu ziehen. Sie ist wichtig für viele andere Aufgaben; ferner ist ihre Möglichkeitserörterung (drei Hauptlagen, zwei Grenzlagen) äußerst lehrreich für den Anfänger; endlich ist der Lösungsgedanke, die Verwendung konzentrischer Kreise, auch für spätere Berührungsaufgaben wichtig.

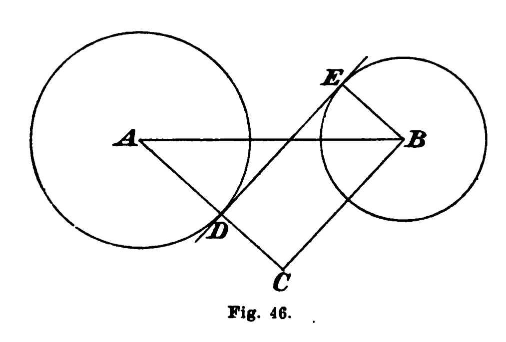


Fig. 46.

Ziehung gemeinsamer Kreistangenten durch mechanische Anlegung des Lineals wäre eine Überschreitung des § 2 festgesetzten rechtmäßigen Gebrauchs und zwar, wie die vorhin gelöste Aufgabe beweist, eine unnötige.

Die vorhin gelösten Aufgaben und Sätze haben wir noch durch den Satz über den von Tangente und Sehne gebildeten Winkel zu vervollständigen.

Beweis und Wortlaut ergeben sich aus Fig. 47 und 48 durch Winkelberechnung. Der von Tangente und Sehne gebildete Winkel ist gleich dem Umkreiswinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt. Verfolgt man den Strahl AD über A in entgegengesetzter Richtung, so erhält man statt α bei A den Ergänzungswinkel $180^{0} - \alpha$. Dies ist auch dem Wortlaut des Satzes entsprechend die Größe des Winkels AEB.

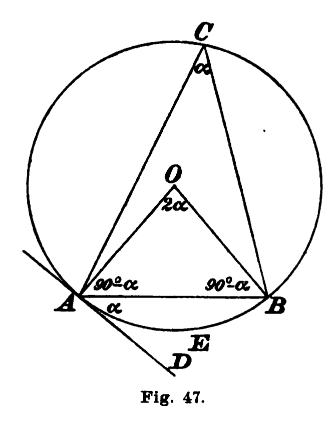


Fig. 47.

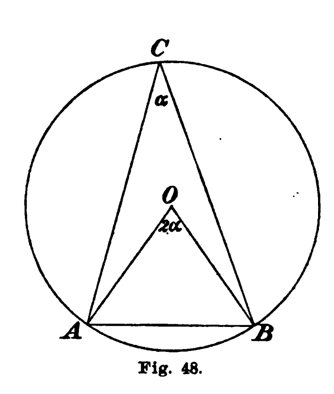


Fig. 48.

Fig. 47 und 48 zeigen die in zahllosen Aufgaben vorkommende Grundaufgabe, über einer Sehne AB einen Bogen zu beschreiben, welcher den Winkel α faßt. Man stellt das Dreieck AOB in Fig. 48 durch Anlegen von $90 - \alpha$ in A und B oder in Fig. 47 durch An-

legen von α an AB her, indem man $OA \perp AD$ macht und die Mittelsenkrechte zu AB errichtet. Das sind die schulmäßigen Lösungen.

In Fig. 49 ist $AC = CB = \frac{a}{2}$, $DC \perp AB$, $\sphericalangle DAC = 90 - \frac{\alpha}{2}$, $DE = EA$, $EO \perp AD$. Die Konstruktion ist weitläufiger als die Schullösung, aber $\sphericalangle DAC$ ist immer spitz, auch für stumpfe α.

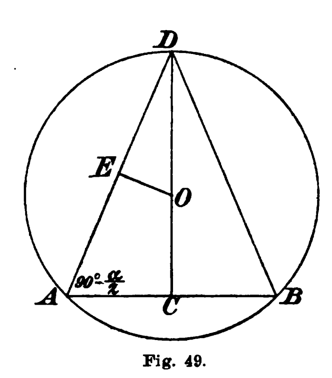


Fig. 49.

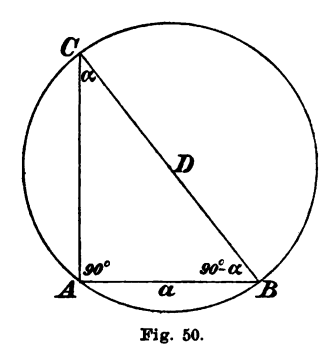


Fig. 50.

Eine weitere Lösung zeigt Fig. 50. Es ist $AB = a$, $CA \perp AB$; $\sphericalangle CBA = 90 - \alpha$; $CD = DB$. Fig. 51 zeigt die allgemeine, auf stumpfes α angewendete Ausführung.

Die vorstehenden Sätze und Aufgaben haben die wesentlichsten Schlußfolgerungen aus dem P. A. für den Kreis gezogen. Im Schulunterricht pflegt diesen Sätzen noch die Lehre vom Parallelogramm vorangestellt zu werden. Diese Anordnung ist durchaus gerechtfertigt, weil das Parallelogramm für den Anfänger ein reichhaltiges und interessantes Übungsmaterial bietet. Für unseren Zweck müssen wir eine andere Ordnung vorziehen. Wir führen das Parallelogramm erst dann ein, wenn wir uns der Inhaltsbestimmung zuwenden, was jetzt geschehen soll.

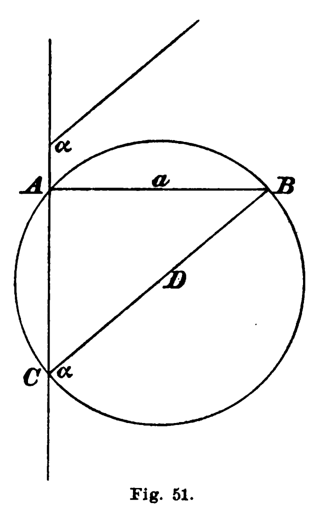


Fig. 51.

Wir können die Sätze über das Parallelogramm durch kurze Angabe des logischen Rahmens erledigen.

Wir bezeichnen die Eigenschaft eines Vierecks, zwei parallele Gegenseiten zu haben, mit A_1. Da das Viereck zwei Paare von Gegenseiten besitzt, so ist die Erklärung des Parallelogramms im logischen Rahmen:

Ein Viereck, in welchem A_1 und zugleich A_2 ist.

In Worten: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem die Gegenseiten paarweise parallel sind.

Die Eigenschaft eines Vierecks, zwei gleiche Gegenseiten zu haben, bezeichnen wir mit B_1; die Gleichheit des anderen Seitenpaares mit B_2.

Wir gelangen dann zu folgenden Sätzen:

1. Wenn in einem Viereck A_1 und A_2 ist, so ist auch B_1 und B_2,
2. „ „ „ „ B_1 „ B_2 „ „ „ „ A_1 „ A_2,
3. „ „ „ „ A_1 „ B_1 „ „ „ „ A_2.

Die naheliegende Voraussetzung, es sei A_1 und B_2, führt entweder zum Parallelogramm oder zum Paralleltrapez mit gleichen nichtparallelen Gegenseiten. Im Viereck haben wir auch zwei Paare Gegenwinkel. Wir wollen die Gleichheit eines Paares gegenüberliegender Winkel durch C_1, die des anderen durch C_2 ausdrücken. Dann haben wir die Sätze:

4. Wenn in einem Viereck A_1 und A_2 ist, so ist auch C_1 und C_2,
5. „ „ „ „ C_1 „ C_2 „ „ „ „ A_1 „ A_2.

Die Eigenschaft, daß die Mittelpunkte der Diagonalen zusammenfallen, können wir mit D bezeichnen und erhalten die weiteren Sätze:

6. Aus A_1 und A_2 folgt D;
7. „ D „ A_1 und A_2.

Andere Zusammenstellungen wie A_1 und C_1 oder B_1 und C_1 führen teils nicht zu eindeutigen, teils zu inhaltsleeren Bestimmungen.

Sind alle vier Seiten gleich, so haben wir den Rhombus, in welchem die Diagonalen zueinander senkrecht stehen und die Winkel halbieren. Sind die Diagonalen gleich, so haben wir das Rechteck vor uns. Diese Eigenschaften sind umkehrbar. Jedes Parallelogramm hat einen Mittelpunkt, nämlich den Schnittpunkt der Diagonalen. Eine Figur hat nämlich dann einen Mittelpunkt, wenn die Begrenzung der Figur jede durch einen gewissen Punkt gehende Gerade so trifft, daß von diesem aus gerechnet entgegengesetzt gleiche Stücke abgeschnitten werden. Die Eigenschaft ist insbesondere für die Kurven zweiter Ordnung wichtig, läßt sich jedoch auch auf Kurven dritter und höherer Ordnung übertragen. Für Kurven $n$ter Ordnung würden wir einen Mittelpunkt als gegeben ansehen, wenn die Summe der zeichenrichtig genommenen Abschnitte auf jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden für ihn als Ursprung der Zählung Null ergibt.

§ 8. Inhaltsbestimmung.

Bevor wir die wichtige Lehre der Inhaltsbestimmung behandeln, müssen wir auf die Größenvergleichung im allgemeinen zurückgreifen. Bisher haben wir Strecken und Winkel als geometrische Größen kennen gelernt. Sind zwei verschiedene Strecken a und b gegeben, so vergleichen wir sie, indem wir die kleinere b auf der größeren a so oft es geht abtragen. Geht dies genau n mal, so ist b das gemeinsame Maß der Strecken a und b. Es ist $a = nb$. Bleibt ein Rest c, so ist $c < b$. Wir tragen c so oft auf b ab als es geht. Geht es genau m mal, so ist c das gemeinsame Maß, wie aus den beiden Gleichungen erhellt:

$$a = nb + c,$$
$$b = mc.$$

Bleibt ein Rest, so ist $b = mc + d$ und $d < c$. In dieser Weise kann das Verfahren fortgesetzt werden. Falls ein gemeinsames Maß der Strecken a und b vorhanden ist, muß es auf diese Weise gefunden werden. Denn wäre das gemeinsame Maß etwa e und $a = pe$, $b = qe$, wo p und q ganze Zahlen sind, so haben wir die Entwicklung des Quotienten $p : q$ vor uns (S. 33), welche bei hinreichender Fortsetzung sicher schließt. Aber das Verfahren an Strecken braucht nicht zu schließen, wie später bewiesen wird. Übrigens würde in der Anwendung das gefundene gemeinsame Maß sofort seinen Dienst versagen, wenn eine dritte gegebene Strecke vorläge. Wir müssen uns daher nach einem anderen gemeinsamen Maße für alle Strecken umsehen. Ein solches gewinnen wir folgendermaßen. Wir nehmen eine willkürliche Strecke, halbieren sie, halbieren die Hälfte usw. Dadurch gelangen wir endlich zu einer Strecke von beliebiger Kleinheit, die wir e nennen wollen. Wenn wir nun e auf den gegebenen Strecken $a, b, c \ldots$ abtragen, so kommen wir zu den Gleichungen:

$$a = me + \alpha, \quad b = ne + \beta, \quad c = pe + \gamma, \ldots$$

Hier sind $m, n, p, \ldots$ ganze Zahlen, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Strecken. Jede dieser Strecken ist kleiner als eine beliebige vorher festgesetzte Strecke e.

Dasselbe gilt auch für die Messung des Winkels. Indes ist doch ein wesentlicher Unterschied zwischen Streckenmessung und Winkelmessung. Während bei der Streckenmessung das Urmaß willkürlich ist und daher gesetzlich bestimmt wird (das Meter, die Toise, der Fuß), gibt es für den Winkel ein von jeder Willkür freies Urmaß. Dies ist der rechte Winkel (90^0) oder der Vollwinkel (360^0). Die Teilung des Meters in 10, 100, 1000 usw. Teile ist willkürlich; ebenso

die Teilung des rechten Winkels in 90 Grad, des Grades in 60 Minuten, der Minute in 60 Sekunden. Es muß hier gleich betont werden, daß die Teilung des rechten Winkels in 90 gleiche Teile mit den Hülfsmitteln der Geometrie, Zirkel und Lineal, nicht möglich ist.

Das Urmaß für Flächenmessung ist das Quadratmeter (qm). Wir beschäftigen uns zunächst mit der Messung des Rechtecks. Seien die Bestimmungsstücke Länge und Breite in metrischem Maß genau meßbar. Dann kann man das gegebene Rechteck durch Parallelen in Quadrate zerlegen und daher die Messung in Teilen des Quadratmeters wirklich ausführen. Nehmen wir aber an, die genaue Angabe sei in metrischem Maß nicht möglich. Dann läßt sich ein metrisches Maß e von beliebiger Kleinheit herstellen, und man kann, wenn a und b die Seiten des Rechtecks sind, zwei Zahlen m und n so angeben, daß $a > me$ und zugleich $a < (m+1)e$, $b > ne$ und $b < (n+1)e$. Daher erhält man für den Inhalt des Rechtecks die beiden Grenzbestimmungen:

$$J > mne^2, \quad J < mne^2 + (m+n+1)e^2.$$

e^2 ist kurze Bezeichnung des über der Seite e errichteten Quadrates, aber die Größe $(m+n+1)e^2$ stellt sich geometrisch dar als ein rechteckiger Streifen mit der Länge $(m+n+1)e$ und der Breite e. Die Länge ist, da $a + b > (m+n)e$ und $a + b < (m+n+2)e$, von der Summe der Strecken $a + b$ nicht um e verschieden. Daher ist der Streifen $(m+n+1)e^2$ (Fig. 52) von beliebiger Kleinheit. Hieraus folgt:

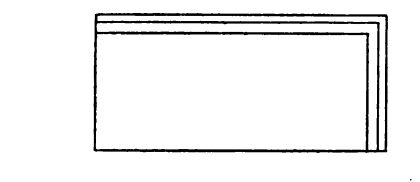


Fig. 52.

Wenn man die Seiten eines Rechtecks in metrischem Maße mißt und dann das Produkt der Maßzahlen bildet, so erhält man einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Rechtecks in demselben metrischen Quadratmaß. Die Näherung kann bis zu jedem Grade der Genauigkeit getrieben werden.

Dasselbe gilt für jedes andere genau wie für das metrische Maß.

Dies kann man auch kurz so ausdrücken: Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus Länge und Breite.

In neuerer Zeit hat man besonderes Gewicht darauf gelegt, die Gleichheit von Flächen durch Zerlegung in kongruente Stücke nachzuweisen. D. Hilbert nennt zwei ebene Figuren zerlegungsgleich, wenn sie sich in eine endliche Zahl von Dreiecken zerlegen lassen, die paarweise kongruent sind. Wir wollen das Wort auch ge-

brauchen, wobei wir aber Zulegen und Wegnehmen kongruenter Stücke gestatten.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind zerlegungsgleich.

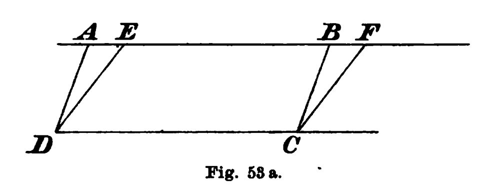


Fig. 53 a.

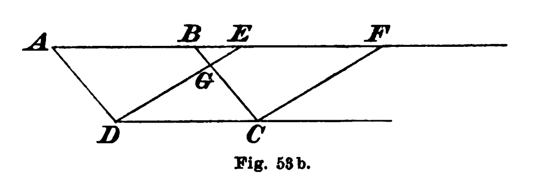


Fig. 53 b.

In Fig. 53a haben die beiden Parallelogramme $ABCD$ und $DEFC$, nachdem sie in zweckmäßige Lage gebracht sind, das Stück $DEBC$ gemein und es ist $\triangle ADE \cong BCF$. In Fig. 53b haben die Parallelogramme das Dreieck DGC gemein. Es ist

$$ABCD = DGC + ADE - BGE$$

und ebenso

$$EDCF = DGC + BCF - BGE.$$

Ein Dreieck ist einem Parallelogramm mit gleicher Grundlinie und halber Höhe zerlegungsgleich.

Sei Fig. 54

$$AD = DB, \quad DF \parallel BC,$$
$$CF \parallel BD.$$

Dann ist $\triangle ADE \cong CEF$, womit die Behauptung bewiesen ist.

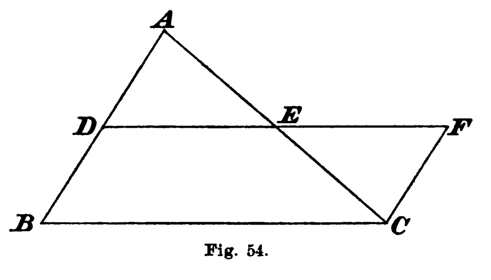


Fig. 54.

Für den ersten Unterricht empfiehlt sich dies Verfahren trotz scheinbarer Einfachheit nicht. Besser ist es, hier Dreieck und Parallelogramm unmittelbar mit dem Rechteck zu vergleichen. Die anzuwendenden Schlüsse zeigen Fig 55a und 55b. Es ist

$$\triangle ABF \cong BAD, \quad AFC \cong CEA.$$

Daher

$$2BAF + 2AFC = DBCE \text{ für } 55\text{a}$$

und

$$2BAF - 2AFC = DBCE \quad \text{„} \quad 55\text{b},$$

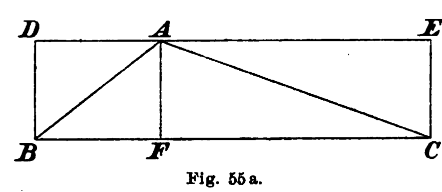


Fig. 55 a.

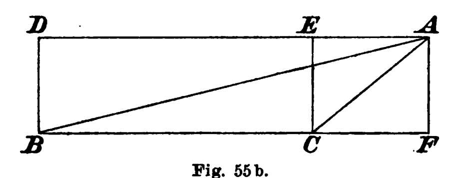


Fig. 55 b.

jedenfalls

$$ABC = \tfrac{1}{2} DBCA.$$

Nunmehr kann der Pythagoreische Satz in mehrfacher Weise bewiesen werden.

1. Beweis. Das Quadrat $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wird nach zwei Arten zerlegt. Fig. 56. Die Dreiecke EAF, FDG, GCH,

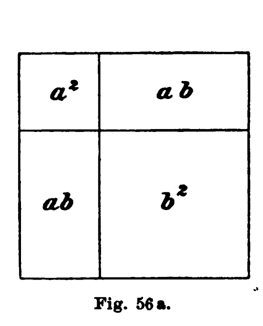


Fig. 56a.

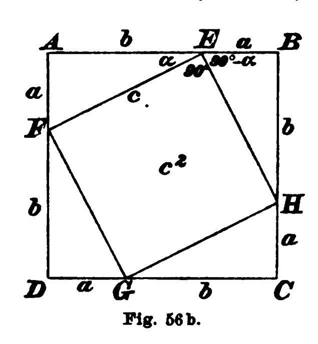


Fig. 56b.

HBE sind kongruent. Die Winkelberechnung bei E zeigt, daß $EFGH$ das Hypotenusenquadrat ist. Folglich

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Die Vorzüge dieses Beweises sind 1. seine Anschaulichkeit; 2. die Benutzung der auch sonst nützlichen Darstellung $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; 3. außer dem ersten Kongruenzsatz wird nur der Satz benutzt, daß ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b die Hälfte eines Rechtecks mit den Seiten a, b ist.

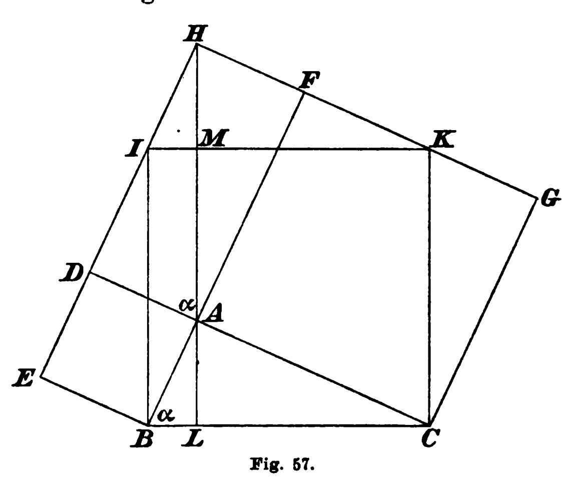


Fig. 57.

Ein Nachteil ist die Notwendigkeit einer Doppelfigur und des Ansatzes einer Gleichung.

2. Beweis. Ausgang vom Satze des Pappus. Über den Katheten werden die Quadrate konstruiert, deren Gegenseiten sich in H schneiden. $BI \parallel AH$ und $CK \parallel AH$ liefern $BI = CK = AH$. Daher ist $BIKC$ ein Parallelogramm und wegen

$$BEDA = BIAH = BLMI;$$
$$AFGC = AHKC = LMKC$$

ist $BIKC$ gleich der Summe der Kathetenquadrate. Es bleibt zu zeigen, daß $BIKC$ das Hypotenusenquadrat ist.

Dies gelingt durch die Kongruenz der Dreiecke BAC und ADH, woraus $AH = BI = KC = BC$ folgt. Die in der Figur angedeutete Winkelberechnung zeigt, daß $\sphericalangle BAL = 90 - \alpha$ wird, woraus $AL \perp BC$ folgt.

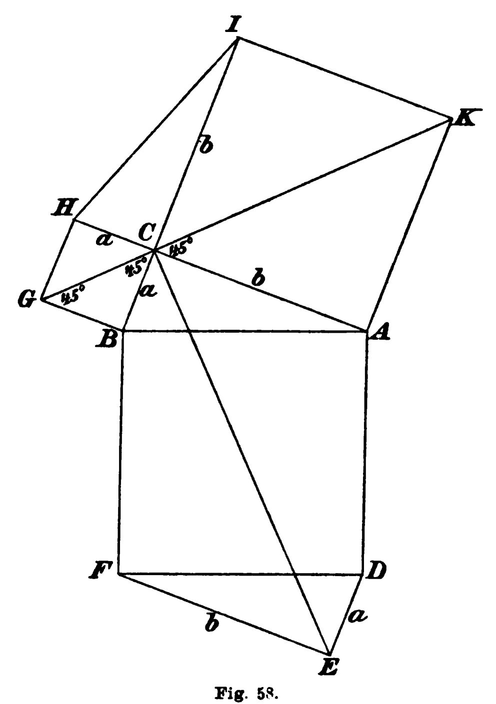


Fig. 58.

Vorzüge dieses Beweises: 1) Folgerichtige Verwendung des Satzes über Flächengleichheit der zwischen denselben Parallelen auf gleicher Grundlinie liegenden Parallelogramme. 2) Reingeometrisches Vorgehen an einer Figur.

Nachteile: 1) Die Konstruktion ist nicht die einfachste. 2) Der Nachweis des Hypotenusenquadrats steht dem ersten Teil des Beweises etwas fern.

3. Beweis. Durch Kongruenz allein:

1) $GHIK \cong GBAK$ (Drehung um die Achse GK).

2) $GBAK \cong CADE$ (Drehung um 90° um den festen Punkt A).

3) $CBFE \cong GBAK$ (Drehung um 90° um den festen Punkt B).

Daher ist $GBAKIH = CBFEDA$. Subtrahiert man das Dreieck HCI und FED, ferner BCA, so bleibt das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate übrig.

Vorzüge: Eine möglichst niedrig bemessene Anzahl von Kenntnissen. Für den Anfangsunterricht der dem Lernenden einleuchtende einfache Gang, Benutzung der Drehungsmethode zum Erweise der Kongruenz.

Nachteil. Die Anordnung des Beweises ist künstlich. Der Satz wird daher als etwas äußerliches aufgefaßt, der Beweis wird schnell gelernt und schnell wieder vergessen.

Den pythagoreischen Lehrsatz wenden wir sofort an zur Lösung von Aufgaben. Man kann sie in die Form setzen

$$x^2 = a^2 + b^2, \quad x^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad x^2 = 2a^2, \quad x^2 = 3a^2, \quad 2x^2 = a^2,$$
$$3x^2 = a^2, \quad nx^2 = a^2.$$

Die Schullösungen sind einfache Anwendungen des Pythagoras oder wiederholte. Allgemein kann man für die Aufgabe $x^2 = na^2$, wo n eine ganze Zahl, zwei Lösungsgedanken durchführen.

1. Man stellt n als Summe von Quadratzahlen dar. Jede ganze Zahl kann als Summe von Quadratzahlen dargestellt werden, und zwar durch vier oder weniger als vier solcher Zahlen. Vgl. Legendre, Zahlentheorie, Deutsch von Maser, I, 216.

$$10 = 9 + 1; \quad 11 = 9 + 1 + 1; \quad 12 = 4 + 4 + 4; \quad 13 = 9 + 4,$$
$$14 = 9 + 4 + 1; \quad 15 = 9 + 4 + 1 + 1; \quad 16 = 16; \quad 17 = 16 + 1,$$
$$18 = 16 + 1 + 1 = 9 + 9; \quad 19 = 9 + 9 + 1; \quad 20 = 16 + 4.$$

2. Jede ganze Zahl n läßt sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen. Es ist nämlich:

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Hierdurch erhält man sofort die Lösung der Gleichung $x^2 = na^2$, nämlich durch Herstellung eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\frac{1}{2}na + \frac{1}{2}a$ und einer Kathete $\frac{1}{2}na - \frac{1}{2}a$.

Die Aufgabe $nx^2 = a^2$ führt man durch $(nx)^2 = na^2$ auf die vorige zurück. Indes ist es zweckmäßig, auf die besonderen Lösungen von $2x^2 = a^2$ am Quadrat und von $3x^2 = a^2$ am gleichseitigen Dreieck zu verweisen. Ein Hinweis auf S. 39 und S. 154 führt alsdann den tatsächlichen Nachweis inkommensurabler Strecken.

Die Umkehrung des Pythagoras ist kein unwichtiger Satz. Im Dreieck ABC sei $a^2 + b^2 = c^2$. Es wird behauptet, das Dreieck sei bei C rechtwinklig. Zum Beweise machen wir die Schenkel eines rechten Winkels den einen gleich a, den andern gleich b; die Verbindungslinie der Endpunkte wird nach Pythagoras gleich c und daher das so gewonnene Dreieck dem Dreieck ABC kongruent. Folglich ist der Winkel bei C ein rechter.

Der sogenannte allgemeine Pythagoras stimmt inhaltlich mit dem Kosinussatz der ebenen Trigonometrie und hat in der Planimetrie als solcher keinen berechtigten Platz.

Nicht überflüssig ist die Bemerkung, daß der Pythagoras uns in den Stand setzt, die Heronische Formel zu entwickeln. Denn diese Formel gehört, wie sich zeigen wird, zu den wichtigsten Sätzen der rechnenden Geometrie. Der Satz des Pappus ersetzt in Fig. 57 das rechtwinklige Dreieck durch ein beliebiges, die Quadrate durch beliebige Parallelogramme.

§ 9. Ähnlichkeit.

Die Ähnlichkeit ist ein Begriff, dessen vollkommene Entfaltung nur in der Euklidischen Geometrie möglich ist. Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn die Winkel entsprechend gleich und die Seiten entsprechend verhältnisgleich sind. Es ist zunächst nicht von vornherein gewiß, daß solche Figuren möglich sind. Auf der Kugelfläche z. B. sind sie nicht möglich. Daher ist es für die lehrhafte Entwicklung nicht zweckmäßig, mit der Erklärung der Ähnlichkeit zu beginnen. Noch mehr stehen unterrichtliche Bedenken deshalb entgegen, weil die Begriffe „entsprechend“ und „verhältnisgleich“ für den Anfänger Schwierigkeiten bieten.

Sei eine Strecke AB gegeben. Ein Punkt dieser Strecke C teilt sie in zwei Stücke AC und CB. Beide Strecken AC und BC sind meßbar (§ 8, S. 199). Bilden wir nun den Quotienten $AC : BC$. Das von uns verwendete Maß sei e. Dann sei

$$AC = me + \alpha, \quad BC = ne + \beta,$$

wo m, n ganze Zahlen, α und β jedes kleiner als e und möglicherweise Null sind.

Die Strecke AC läßt sich durch fortgesetzte Halbierung in beliebig kleine Teile teilen. Denken wir etwa an 2^{64} gleiche Teile. Diese Teile denken wir uns auf CB abgetragen. Dann wird der Punkt B entweder selbst ein Teilpunkt sein oder zwischen zwei aufeinander folgende Teilpunkte fallen. Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, der Größenverbindung $BC : AC$ den Quotienten zweier ganzen Zahlen in der Weise zuzuordnen, daß entweder genaue Übereinstimmung stattfindet oder der Fehler kleiner ist als eine vorher festgesetzte beliebig kleine Größe. Das Verhältnis oder der Bruch zweier Strecken ist also der Quotient der beiden Zahlen, die bei der Messung der Strecken mit demselben Maß gewonnen werden. Diese Zahlen sind entweder ganze Zahlen oder sie können bis zu jedem vorgeschriebenen Grade der Annäherung durch ganze Zahlen ersetzt werden. Damit ist die Unterscheidung der Strecken in kommensurable und inkommensurable beendet und in gewissem Sinne beseitigt. Daß wirklich Strecken vorhanden sind, welche auf keine Weise mit gemeinsamem Maß genau gemessen werden können, bedarf eines besonderen Beweises. Wir haben sie durch Behandlung der Gleichung $x^2 = na^2$ kennen gelernt und damit den Beweis geführt.

Es mögen nun zwei Strahlen AB und AC gegeben sein. Sie mögen von drei Parallelen (Fig. 59) DE, FG, HI so geschnitten werden, daß die Abschnitte auf dem einen Strahl einander gleich sind, $DF = FH$. Dann sind auch die Abschnitte auf dem andern Strahl

einander gleich, $EG = GI$. Der Beweis ergibt sich aus der Kongruenz der Dreiecke DFG_1 und FHI_1, wenn $DG_1 \parallel EG$, $FI_1 \parallel GI$.

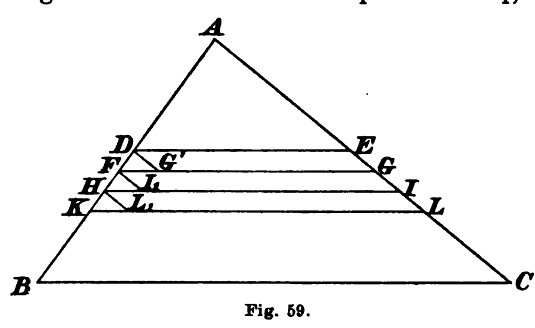


Fig. 59.

Derselbe Satz gilt, wenn statt der drei Parallelen beliebig viele gegeben sind und hat demnach folgenden Wortlaut:

Werden zwei Gerade von einem Gefüge paralleler Linien derartig geschnitten, daß die Stücke auf der einen Geraden unter sich gleich sind, so sind die Stücke, welche auf der andern Geraden bestimmt werden, auch unter sich gleich.

Dieser Satz gibt uns ein Mittel, die gegebene Strecke a in n gleiche Teile zu teilen.

Wir legen an die Strecke $a = AB$ (Fig. 60) im Endpunkt A einen Strahl, tragen auf ihm von A aus ein beliebiges gleiches Stück n-mal ab und ziehen BC, indem wir den letzten Teilpunkt mit dem andern Endpunkt der Strecke verbinden. Dann ziehen wir durch die Teilpunkte der Strecke AC Parallele zu BC.

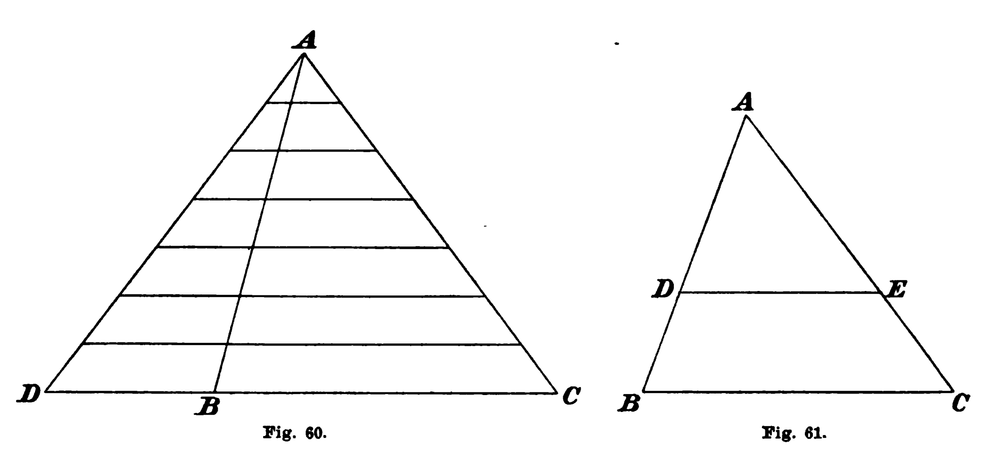


Fig. 60. Fig. 61.

Um die mühsame Herstellung der einzelnen Parallelen zu vermeiden, beschreiben wir mit AC (Fig. 60) um A einen Kreis, welcher BC in D zum zweitenmal trifft. Dann brauchen wir nur auf AD dieselben n gleichen Stücke wie auf AC abzutragen und erhalten die gesuchten Parallelen mit einem Schlage. Nunmehr sei (Fig. 61) $DE \parallel BC$. Wir nehmen eine Strecke e, welche kleiner sein soll als

eine beliebig kleine vorher festgesetzte Strecke und tragen e von A anfangend auf AB ab. Durch die einzelnen Teilpunkte ziehen wir Parallelen zu BC. Dadurch entsteht auf AC ein entsprechendes Gefüge gleicher Strecken wie auf AB. Es ist daher $AD:DB$ und $AE:EC$ dem Quotienten derselben ganzen Zahlen gleich oder wird mit beliebig großer Annäherung durch dieselben ganzen Zahlen ausgedrückt und zwar als Quotient dieser Zahlen. Also ist

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

Damit haben wir den Hauptlehrsatz: Eine zur Grundlinie des Dreiecks gezogene Parallele teilt die Seiten in verhältnisgleiche Stücke.

Die Entwicklungen der S. 205 setzen uns nun in den Stand, mit den Brüchen der Strecken zu rechnen. Denn es besteht die Gleichung $\frac{AD}{DB}=m$, wo m eine bestimmte Zahl ist, gleichgültig welcher Art, ob rational, irrational, transzendent. Es ist also $AD=m\cdot DB$. Ebenso folgt $AE=m\cdot EC$. Daher ist

$$AD+DB=(m+1)DB;\quad AE+EC=(m+1)EC.$$

Folglich

$$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}$$

oder

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

Ebenso wird $DB:AB=EC:AC$ usw. Auch wird

$$AD\cdot EC=m\cdot DB\cdot EC;\quad DB\cdot AE=m\cdot DB\cdot EC,$$

folglich

$$AD\cdot EC=DB\cdot AE.$$

Daher dürfen wir von nun an mit den Strecken wie mit Zahlen rechnen. Diese Bemerkung ist nicht selbstverständlich. Gegenstand der Rechnung ist in der Arithmetik die unbenannte Zahl. Sobald irgendwelche Dinge (Kilogramm, Meter, Winkelgrad, Bogengrad, Mark usw.) in die Rechnung eintreten, verlieren sie ihre Bedeutung und gewinnen erst beim Abschluß durch Deutung des Ergebnisses ihre entsprechende Geltung zurück. Ob wir dem Ergebnisse $AD\cdot EC$ eine geometrische Bedeutung als Rechteck beilegen wollen oder nicht, ist an sich gleichgültig. Indem man unter e ein beliebiges Maß versteht, ist etwa $DB=pe$ und $EC=qe$, folglich $AD=mpe$, $AE=mqe$ und es ist $AD\cdot EC=DB\cdot AE$, weil beidemal das Produkt der Maßzahlen mpq erhalten wird. Wäre dies nicht ausreichend, so würde man Gleichungen, in welchen Produkte von mehr als drei Strecken

auftreten, erst einer künstlichen Umformung unterziehen müssen. So würde man statt $x^4 + y^4 = a^4$ schreiben müssen:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{a} = a^3, \quad \text{oder} \quad \frac{x^4}{a^3} + \frac{y^4}{a^3} = a.$$

Der von uns gewonnene Hauptlehrsatz ist umkehrbar. Aus dem Bestehen der Verhältnisgleichung $AD : DB = AE : EC$ folgt, daß $DE \parallel BC$ ist. Der Beweis wird indirekt geführt. Möge die durch D zu BC gezogene Parallele (Fig. 62) nicht E, sondern F treffen. Dann wäre $AD : DB = AF : FC$ und zugleich

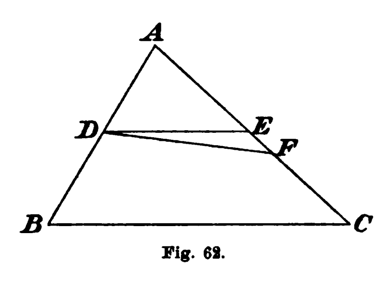


Fig. 62.

$$AD : DB = AE : EC$$

oder

$$AF : FC = AE : EC,$$
$$AF : AE = FC : EC.$$

Die linke Seite ist > 1, die rechte < 1, also ist diese Gleichung unmöglich.

Untersuchen wir den Beweis genauer. Zunächst enthält er die stillschweigende Annahme, daß die Parallele, welche von D zwischen A und B ausgeht, auch einen Punkt zwischen A und C trifft. Dies ist eine Folgerung aus dem Axiom II 4 Hilberts, wenn man die Anschauung nicht gelten läßt.

Der weitere eigentliche Beweisgrund ist folgender. Wie ein Punkt D auf einer Strecke durch den Quotienten $DA : DB$ eine bestimmte Zahl m angibt, so bestimmt umgekehrt eine bestimmte Zahl m den zugehörigen Punkt D. Dies wurde im Beweise für die Punkte E und F dargetan.

A D E B

Fig. 63.

Um dies noch genauer zu untersuchen, sei (Fig. 63) $AD = me$, $DB = ne$, $DE = pe$, $p < n$. Dann ist

$$\frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}, \quad \frac{EA}{EB} = \frac{m+p}{n-p},$$

also

$$\frac{EA}{EB} - \frac{DA}{DB} = \frac{(m+n)p}{n(n-p)}.$$

Da $p < n$, so ist der Quotient rechts für alle Punkte E zwischen D und B positiv und verschwindet, wenn p unendlich klein wird. Daraus folgt: Der Quotient $DA : DB$ durchwandert stetig wachsend alle Werte von Null bis Unendlich, während D sich von A nach B verschiebt. Jeder bestimmte Zahlwert wird einmal und nur einmal angenommen; in der Gleichung $DA : DB = m$ bestimmt der Punkt D die Zahl m eindeutig und umkehrbar. Die Erweiterung dieser Ge-

danken durch Betrachtung der nicht auf der Strecke AB liegenden Punkte der Geraden AB folgt weiter unten.

Betrachten wir Fig. 64 und bemerken, daß $AE : AC = BF : BC$, so ist wegen $DE = BF$ auch

$$AE : AC = DE : BC.$$

Wenn wir also setzen $AB = m \cdot AD$, wo m eine bestimmte reelle (rationale, irrationale, transzendente) Zahl, so ist auch $AC = m \cdot AE$ und $BC = m \cdot DE$. Das Zusammenbestehen der drei Gleichungen:

$$AB = m \cdot AD, \quad AC = m \cdot AE, \quad BC = m \cdot DE$$

erklärt den Begriff: die drei Seiten des Dreiecks ADE sind verhältnisgleich den entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC. Ferner

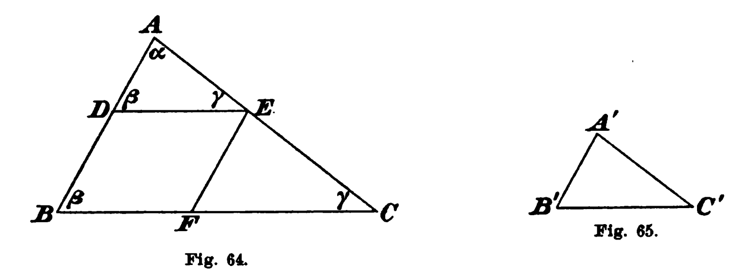


Fig. 64.

Fig. 65.

sind aber auch die entsprechenden Winkel gleich, wie die eingeschriebenen gleichen Buchstaben anzeigen. Die beiden Dreiecke ADE und ABC sind also nach der zu Anfang dieses Paragraphen gegebenen Erklärung ähnliche Figuren. Hiermit ist der Beweis erbracht, daß tatsächlich ähnliche Dreiecke möglich sind. Nunmehr folgt die Entscheidung der Frage, ob die vier Gleichungen

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta',$$

welche die Ähnlichkeit der Dreiecke a, b, c; α, β, γ und a', b', c'; α', β', γ' ausdrücken, voneinander unabhängig sind. Die Frage ist zu verneinen. Zwei jener Gleichungen sind immer die Folge der beiden andern. Wir wollen sie in folgender Ordnung aufführen:

$$1) \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}, \quad \alpha = \alpha'; \qquad 2) \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

$$3) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}; \qquad 4) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \alpha = \alpha'.$$

Während die Bestimmung in den Fällen 1), 2), 3) eindeutig ist, muß bei 4) der Zusatz gemacht werden $a > b$.

Faßt man die vier Gleichungen in Worte, so erhält man die vier Kriterien der Ähnlichkeit und zwar in der Reihenfolge der

Gleichheitskriterien (§ 3 und 5). Die Beweise vollziehen sich in allen vier Fällen durch dieselbe Schlußweise.

Wir machen (Fig. 64, 65) $AD = c'$, ziehen $DE \parallel BC$. Dann wird $ADE \sim ABC$ und es bleibt zu zeigen, daß $ADE \cong A'B'C'$. Dies ist der Fall. Für 1) ist

$$\text{nach der Figur } \frac{c'}{c} = \frac{AE}{b}, \quad \text{nach Voraussetzung } \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b},$$

also $AE = b'$. Also $ADE \cong A'B'C'$ nach dem 1. Kongruenzsatz.

Für 2) ist Übereinstimmung in den Winkeln vorhanden und es ist $AD = A'B'$. Für 3) ist

$$\text{nach der Figur } \quad \frac{c'}{c} = \frac{AE}{b}; \quad \frac{c'}{c} = \frac{DE}{a};$$

$$\text{nach Voraussetzung } \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}; \quad \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}.$$

Folglich $AE = b'$, $DE = a'$.

Für 4) ist $AE = A'C' = b'$ gemacht und $DE \parallel BC$,

$$\text{nach der Figur also } \frac{b'}{b} = \frac{DE}{a},$$

$$\text{nach der Annahme } \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}.$$

Also ist $DE = a'$ und $A'B'C' \cong ADE$ nach dem 4. Kongruenzsatz.

Von den vier Ähnlichkeitskriterien spielt das zweite die vorherrschende Rolle.

§ 10. Anwendung der Ähnlichkeitslehre auf Dreieck und Kreis.

Die hier vorzutragenden Sätze gehören zu den wichtigsten der Geometrie und beherrschen demgemäß die Lehraufgabe schon z. T. der mittleren und vorwiegend der oberen Klassen unserer Lehranstalten.

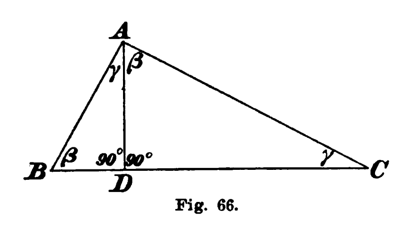


Fig. 66.

Für das Dreieck handelt es sich um die Satzgruppe am rechtwinkligen Dreieck und um die Winkelhalbierer; für den Kreis um den Satz von der Potenz am Kreise.

Die Satzgruppe am rechtwinkligen Dreieck folgt aus der Eigenschaft, daß die Hypotenusenhöhe es in zwei einander und dem ganzen Dreieck ähnliche Stücke zerlegt.

Der Beweis ergibt sich aus dem Anblick der Figur 66 bei Anwendung der Methode der Winkelberechnung.

Es ist

$$\cos\beta = \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC}, \quad \cos\gamma = \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

also

$$BA^2 = BD \cdot BC, \quad AC^2 = DC \cdot BC.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}, \quad \text{also} \quad AD^2 = BD \cdot DC.$$

Von den trigonometrischen Funktionen ist hier nur der leichteren Übersicht wegen Gebrauch gemacht; im Unterricht darf man sie auf dieser Stufe natürlich nicht verwenden.

Den Wortlaut der Sätze liefert am besten der Begriff des geometrischen Mittels. Er ist an dieser Stelle zunächst für Zahlwerte durch die Gleichung $x^2 = ab$ oder $a : x = x : b$ zu entwickeln und dann geometrisch für Strecken anzugeben. Eine Strecke x ist das geometrische Mittel der beiden Strecken a und b, wenn die Verhältnisgleichung besteht $a : x = x : b$. Es folgt dann $x^2 = ab$, d. h. das Rechteck der gegebenen Strecken ist inhaltsgleich dem Quadrat über dem geometrischen Mittel.

Die obigen Sätze haben nun den Wortlaut: Die Hypotenusenhöhe ist das geometrische Mittel der beiden Kathetenprojektionen und jede Kathete ist das geometrische Mittel ihrer Projektion und der Hypotenuse.

Aus Addition der letzten Satzgleichungen folgt der Pythagoreische Lehrsatz. Dabei ist zu bemerken, daß bei dem Euklidischen Beweise dieses Satzes, der in jedem Schulbuch zu finden ist, genau derselbe Gedankengang zugrunde liegt. Es wird nämlich die Gleichheit eines Kathetenquadrats mit dem nächstliegenden Rechteck gebildet aus Hypotenuse und Kathetenprojektion geometrisch dargetan.

Die Sätze vom rechtwinkligen Dreieck sind besondere Fälle des Satzes von der Potenz am Kreise. Sie sind für die Lösung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis von höchster Wichtigkeit.

An dieser Stelle können die in der Mathematik behandelten Mittel besprochen werden. Sei

$$n \cdot F(x) = F(a_1) + F(a_2) + F(a_3) + \cdots + F(a_n),$$

wo $F(x)$ irgend eine Funktion ist. Nehmen wir die Fälle $F(x) = x$, $\log x$, $\frac{1}{x}$, x^2, so haben wir die vier bekanntesten Mittel vor uns:

1) $nx = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, arithmetisches Mittel;

2) $x^n = a_1 a_2 \ldots a_n$, geometrisches „

3) $\frac{n}{x} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, harmonisches „

4) $nx^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2$, quadratisches „

In der Ausgleichsrechnung spielt das letzte bei Bestimmung des mittleren Fehlers (*error medius metuendus*) eine höchst wichtige Rolle.

Wenden wir uns nun dem Satze von den Winkelhalbierern zu.

Im Dreieck ABC (Fig. 67) ist der Winkel A halbiert. Zieht man zur Halbierungslinie AD die Parallele BE, so wird gemäß Winkelberechnung $\triangle AEB$ gleichschenklig und so ergeben sich die Verhältnisgleichungen

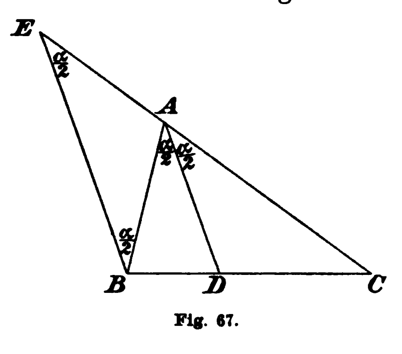


Fig. 67.

$$AE : AC = DB : DC$$

und

$$AB : AC = DB : DC.$$

Hierin liegt der Satz:

Die Halbierungslinie eines Innenwinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

Der Satz kann auch bewiesen werden, indem man $AE = AB$ macht und beweist, daß $EB \parallel AD$.

Aus der Verhältnisgleichung: $EB : AD = EC : AC$ oder $x : w_a = (b + c) : b$ ergibt sich die Lösung der Dreiecksaufgabe b, c, w_α.

Der Satz hat eine Ergänzung in dem folgenden. Man halbiert den Außenwinkel bei A (Fig. 68), zieht zur Halbierungslinie die Parallele BE und findet durch Winkelberechnung $AE = AB$. Dann ist

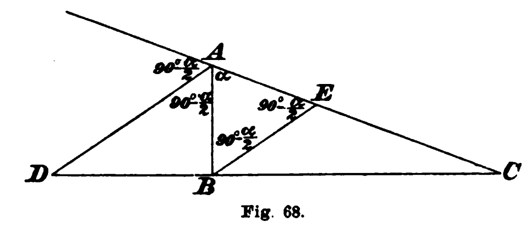


Fig. 68.

$$AE : AC = DB : DC \quad \text{und} \quad AB : AC = DB : DC.$$

Die Halbierungslinie eines Außenwinkels teilt die Gegenseite nach außen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

Bei den Bezeichnungen unserer Figuren 67 und 68 ist der Text der Gleichungen, nicht der Winkelbezeichnungen übertragbar.

Die Halbierer des Innen- und des Außenwinkels stehen zueinander senkrecht: $\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 90^0$.

Die vier Punkte $B, C; E, D$ (Fig. 69) bilden eine harmonische Gruppe, die Strahlen $AE, AD; AB, AC$ sind harmonische Strahlen. Sie werden uns demnächst vielfach beschäftigen.

Die Fig. 69 zeigt, daß A auf einem Kreise liegt, dessen Durchmesser ED ist. Dieser Kreis vervollständigt die vorigen beiden Sätze um ein wesentliches Glied, den Satz des Apollonius.

Sei eine Strecke BC (Fig. 70) gegeben. Greifen wir einen willkürlichen Punkt D heraus, so ist der Quotient $DB:DC$ eine bestimmte Zahl. Sie wird 0, wenn D mit B zusammenfällt, sie wird beliebig groß, wenn D sich C hinreichend nähert. Der Wert des Quotienten $x:(a-x)$ durchläuft, wenn D sich von B nach C bewegt, alle Zahlwerte und zwar monoton. Denn bei dieser Bewegung nimmt der Zähler x zu und der Nenner $a-x$ ab. Also ist die Zunahme stetig, und jede Zahl zwischen 0 und ∞ wird von $x:(a-x)$ einmal, aber auch nur einmal erreicht. Aus

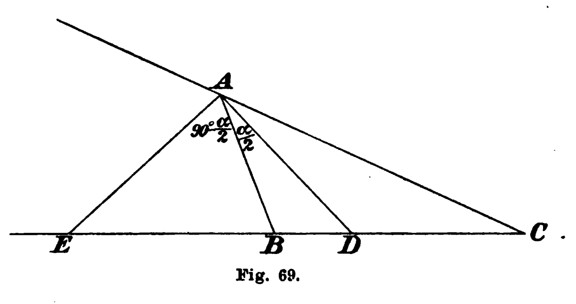


Fig. 69.

$$x:(a-x)=m \quad \text{folgt} \quad x=am:(m+1).$$

Greifen wir nun irgend einen Punkt A der Ebene heraus und bilden den Quotienten $AB:AC$, so ist dieser Quotient ebenfalls eine bestimmte Zahl. Aber bei umgekehrter Fragestellung liegt die Sache anders. Sei $AB:AC=m$, und m eine bestimmte Zahl, so ist die Lage des Punktes A nicht mehr bestimmt, wir erhalten einen geometrischen Ort, den Kreis des Apollonius. Zunächst ist klar, daß der gesuchte geometrische Ort zur Strecke BC symmetrisch liegen muß.

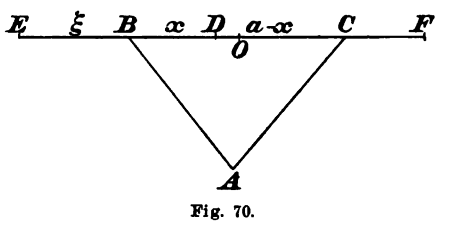


Fig. 70.

Zur weiteren Entwicklung ist der Begriff der äußeren Teilung nötig. Sei $BE=\xi$, also $EC=\xi+a$. Dann betrachten wir den Quotienten $EB:EC$ und sagen, die Strecke BC sei im Punkte E nach außen geteilt. Der Quotient

$$\frac{\xi}{\xi+a}$$

durchläuft auf dem Strahl BE monoton zunehmend alle Werte von 0 bis 1; denn für ein sehr großes ξ bekommt er den Wert $1:\left(1+\frac{a}{\xi}\right)$. Auf dem Strahl CF haben wir den Quotienten $FB:FC$ zu untersuchen mit der Bestimmung $\xi>a$, oder

$$\frac{\xi}{\xi-a}=\frac{-\xi}{-\xi+a}.$$

Dieser durchläuft alle Werte von ∞ in C bis 1 für einen unendlich fernen Punkt F. Zähler und Nenner haben gleiches Vorzeichen; der Quotient ist positiv. Somit können wir das Ergebnis zusammenfassen wie folgt.

Greifen wir irgend einen Punkt der unbegrenzten Geraden BC heraus mit Ausnahme der auf der Strecke BC liegenden und bilden den Quotienten $EB:EC$, so erhält dieser Quotient alle Werte von 0 bis ∞ und zwar jeden nur einmal.

Weil nun dasselbe für die Punkte der Strecke BC gilt, so haben wir:

Auf der Geraden BC sind für jeden gegebenen Wert m zwei Punkte D und E vorhanden, so daß

$$DB:DC = m \quad \text{und} \quad EB:EC = m$$

ist. Der eine dieser Punkte (D) liegt auf der Strecke BC, der andere auf der Geraden BC außerhalb der Strecke.

Setzen wir $DB = x$, $EB = \xi$, so finden wir die Entfernungen x und ξ durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a-x} = m; \quad \frac{\xi}{a+\xi} = m.$$

Der Wert $m = 1$ wird erhalten für $x = \frac{a}{2}$ und für $\xi = \infty$. $m = \frac{1}{2}$ wird gefunden für $x = \frac{a}{3}$ und $\xi = a$. $m = 2$ liefert $x = \frac{2a}{3}$ und $\xi = -2a$. Der letztgefundene Wert liegt dem Beschauer der Fig. 71 rechts von B. Das Auftreten der negativen Vorzeichen veranlaßt uns zu der Bemerkung, daß wir innere und äußere Teilung nicht ohne Festsetzung eines bestimmten Sinnes der Zählung behandeln sollen. Sei Fig. 70 B der Anfang der Zählung, BC die positive Richtung und betrachten wir statt der oben behandelten zwei Quotienten $x:(a-x)$ und $\xi:(\xi+a)$ nur einen, den Quotienten

Fig. 71.

$$\frac{x}{a-x}.$$

Er durchläuft alle positiven Werte von 0 bis ∞, wenn x sich von 0 bis a, D sich von B bis C bewegt. Für $x > a > 0$ ist der Quotient negativ, der Punkt D liegt dem Beschauer der Figur 71 rechts von C. Der Wert des Quotienten durchläuft die Zahlen $-\infty$ bis -1. Ist x negativ, also D links von B aufzufinden, so ist der Quotient negativ und durchläuft die Werte von 0 bis -1.

Wenn wir also die Strecken entsprechend ihrer von einem Zählpunkte ausgehenden Entfernungsgröße mit Vorzeichen

versehen, so durchläuft der Quotient $BD:DC$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ und jeden nur einmal. Zugeordnete Teilpunkte sind dann solche, deren zugehörende Quotienten entgegengesetzt gleich sind. In dieser Darstellung wird man folgerichtig BD von DB unterscheiden und setzen: $BD + DB = 0$, $BD = -DB$.

Die Einführung der Streckenvorzeichen hat den Vorzug der strengen Folgerichtigkeit. Sobald die Rechnung einsetzt, sind sie nicht zu vermeiden und erscheinen geometrische Deutung heischend von selbst. Für den Anfangsunterricht bieten sie eine Schwierigkeit, welche für den Schüler den wissenschaftlichen Gewinn übersteigt. Wir werden deshalb die Streckenvorzeichen in der Hauptdarstellung vermeiden. Dieses Verfahren findet auch eine wissenschaftliche Stütze, auf die wir weiter unten verweisen.

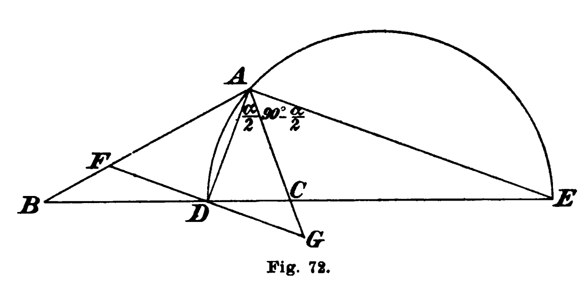


Fig. 72.

Auf der Geraden BC (Fig. 72) seien zwei Punkte D und E so bestimmt, daß $DB:DC = m = EB:EC$. Über ED als Durchmesser sei ein Kreis beschrieben und ein Punkt des Kreises A mit B und C verbunden. Wir behaupten: $AB:AC = m$.

Beweis. $\sphericalangle DAE = 90^0$; sei $FD \parallel AE$, also $\sphericalangle FDA = 90^0$. Dann ist $BD:BE = FD:AE$ und $DC:CE = DG:AE$. Nun ist $DB:DC = EB:EC$ nach Voraussetzung, also $DB:EB = DC:EC$; also $FD:AE = DG:AE$, $FD = DG$. Nun ist $FDA \cong GDA$, also AD Halbierer des Innenwinkels, AE des Außenwinkels, folglich:

$$AB:AC = DB:DC = m.$$

Dieser über DE beschriebene Kreis heißt der Apollonische und der entsprechende Satz der Satz des Apollonius. Er läßt sich so aussprechen:

Der geometrische Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein festes Verhältnis haben, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der festen Punkte liegt.

Die Schnittpunkte des Kreises teilen diese allen seinen Punkten gemeinsame Eigenschaft. Folglich ist, wenn $AB:AC = m$, auch $DB:DC = m$ und $EB:EC = m$. In dieser Bemerkung liegt die

wissenschaftliche Stütze für die Nichteinführung der Streckenvorzeichen. Es liegt jedoch kein Widerspruch vor. Denn die Funktion $AB:AC$ wechselt ihr Vorzeichen nicht, weil ihre Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte auf dem Apollonischen Kreise umgangen werden, während beim Fortschreiten auf der Geraden BC der Funktionsweg durch diese Punkte führt. Beziehen wir A auf ein in B entspringendes Koordinatensystem und setzen $BC = a$, so ist die fragliche Funktion

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}.$$

Sind die Vorzeichen willkürlich bestimmt, so kann bei stetiger Fortbewegung des Punktes (x, y) ein Wechsel des Vorzeichens nicht eintreten, wenn der Abstand des bewegten Punktes (x, y) von jedem der Punkte $(0, 0)$ und $(a, 0)$ nicht unter eine endliche Größe sinkt. Die Entwicklung des Ansatzes

$$\frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = m^2$$

führt sofort zur Gleichung des Kreises. Seine Schnittpunkte mit BC folgen für $y = 0$ aus

$$\frac{x}{x-a} = +m \quad \text{und} \quad \frac{x}{x-a} = -m.$$

Hier erscheinen sofort wieder die Vorzeichen $\pm m$. Durch die Quadrierung ist nämlich die Frage gestellt, in welchen Punkten A der Quotient $AB^2 : AC^2 = m^2$ sei. Die Antwort ist $x^2 = (x-a)^2 m^2$, daher doppelsinnig.

Wenn m einen bestimmten Wert hat, so bewegt sich (x, y) auf einem bestimmten Kreise. Wenn m seinen Wert ändert, so ändert sich auch der Kreis. Für $m = 1$ entartet der Kreis und geht in die Mittelsenkrechte zu BC über. Sämtliche Kreise der bezeichneten Art bilden ein Büschel, dem zwei unendlich kleine Kreise, nämlich die Punkte B, C angehören und welches den über BC als Durchmesser stehenden Kreis rechtwinklig schneidet.

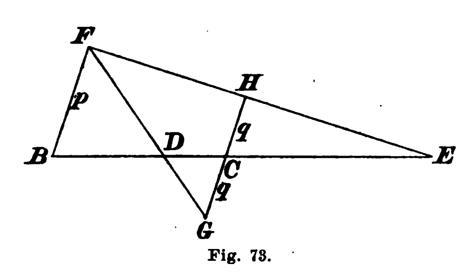


Fig. 73.

Der Satz des Apollonius steht in Beziehung zu der Teilung der Strecke a im Verhältnisse $DB : DC = m$ nach innen und außen. Diese Teilung soll nun noch näher untersucht werden.

Zunächst geometrisch. Wir ziehen (Fig. 73) durch die Endpunkte der Strecke die Parallelen $BF \parallel CH$, machen $BF = p$,

$CG = HC = q$, ziehen FH und FG. Dann ist $DB : DC = p : q$ und $EB : EC = p : q$.

Drehen sich BF und CH um B und C und bleiben bei der Drehung stets einander parallel, so treten auf BC immer dieselben Teilpunkte D und E auf. Denn ihre Lage ist nur durch $BC = a$ und $p : q$ bestimmt. Diese schon oben gewonnene Einsicht können wir bestätigen wie folgt. Sei $DB = x$, $p : q = m$. Dann ist $x : (a - x) = p : q$. Hieraus folgt $x = \frac{ap}{p + q}$, also ein einziger bestimmter Wert. Sei $DE = y$, so ist $y : (y - a) = p : q$; also $y = \frac{ap}{p - q}$, wiederum ein einziger bestimmter Wert.

Bei der Drehung die wir soeben beschrieben haben, erhalten wir zwei Kreise um die Punkte B und C mit den Radien p, q. Die Punkte der inneren und äußeren Teilung erhalten nun eine wichtige geometrische Bedeutung. Sie sind die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangentenpaare an die vorhin besprochenen Kreise und heißen deren innerer und äußerer **Ähnlichkeitspunkt.** Diese Ähnlichkeitspunkte sind immer reell vorhanden, auch wenn die beiden Kreise keine reellen gemeinsamen Tangenten haben. Sind die beiden Kreise gleich, so liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt unendlich fern. Die drei möglichen Hauptlagen bringen Fig. 74a, 74b, 74c zur Anschauung.

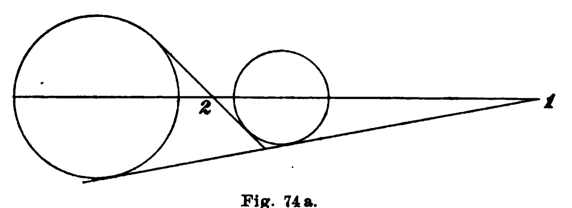


Fig. 74a.

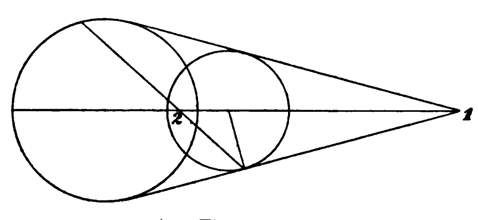


Fig. 74b.

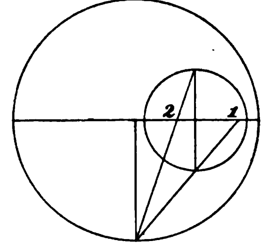


Fig. 74c.

Man erkennt, daß die Bestimmung der Ähnlichkeitspunkte zu wichtigen Aufgaben führt.

Als Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise bestimmen sie diese Tangenten.

Verbindet man einen Punkt des Apollonischen Kreises, welcher zwei Ähnlichkeitspunkte zu Endpunkten des Durchmessers hat, mit den Kreismittelpunkten (Fig. 75), so ist

$$FA : FB = r : \varrho, \quad \text{also} \quad FA : r = FB : \varrho,$$

wo r und ϱ die Radien der gegebenen Kreise sind. Also: ist α der Winkel, den FA mit der von F an den Kreis um A gezogenen Tangente bildet, so ist

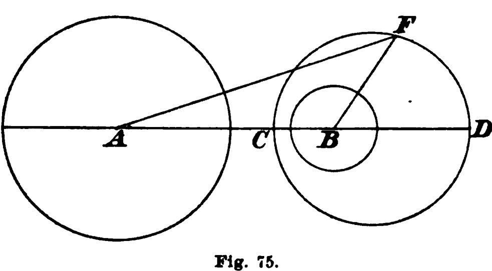


Fig. 75.

$$\sin \alpha = \frac{r}{FA} = \frac{\varrho}{FB}.$$

Die Kreise um A und B erscheinen von F aus unter gleichem Sehwinkel.

Wenn wir endlich die Lage der inneren und äußeren Teilpunkte D und E zu den Grundpunkten BC durch eine einfache algebraische Beziehung ausdrücken wollen, so gehen wir am besten vom Mittelpunkte O der Strecke BC aus (Fig. 70). Es ist dann, wenn $OD = u$, $OE = v$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{a}{2} - u\right) : \left(\frac{a}{2} + u\right) = DB : DC = m, \quad \text{also} \quad 2u = a\frac{1-m}{1+m};$$

$$\left(v - \frac{a}{2}\right) : \left(v + \frac{a}{2}\right) = EB : ED = m, \quad \text{also} \quad 2v = a\frac{1+m}{1-m}.$$

Mithin ist

$$uv = \tfrac{1}{4}a^2.$$

Dieser Ausdruck gibt die einfachste arithmetische Verknüpfung für die uns hier beschäftigenden geometrischen Verhältnisse. Man ersieht daraus sofort:

1. Zu jedem Punktepaar B, C gehören unendlich viele zugeordnete harmonische Punktpaare D, E.

2. Jedes Punktepaar D, E liegt auf demselben Strahl, der von O ausgeht, d. h. O kann D, E niemals trennen.

3. Fällt D mit B zusammen, so liegt auch E in B.

4. Rückt D in die Nähe von O, so entflieht E ins Unendliche.

Dabei bleibt aber bestehen, daß die wichtigsten geometrischen Eigenschaften der harmonischen Punkte nicht mit der Produktengleichung $4uv = a^2$, sondern mit der oben besprochenen Verhältnisgleichung $DB : DC = EB : EC$ den nächsten Zusammenhang haben. Der Grund liegt in den Eigenschaften der anharmonischen Verhältnisgleichung, zu der wir weiter unten gelangen.

Wir kommen nun zum Satze von der Potenz am Kreise. Ein Kreis und ein Punkt sind gegeben (Fig. 76, 77, 78). Wir bezeichnen den Punkt mit O und ziehen durch ihn zwei Gerade, welche den Kreis in den Punkten A, B und C, D schneiden mögen. Die Drei

ecke $OAD \sim OCB$ ergeben die Verhältnisgleichung $OA : OD = OC : OB$, daher die Produktengleichung

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Hierin liegt der **Satz von der Potenz am Kreise. Dreht eine Gerade sich um einen Punkt, so ist das Rechteck gebildet aus den Abständen des Punktes von den Kreisschnittpunkten der Geraden unveränderlichen Inhalts.**

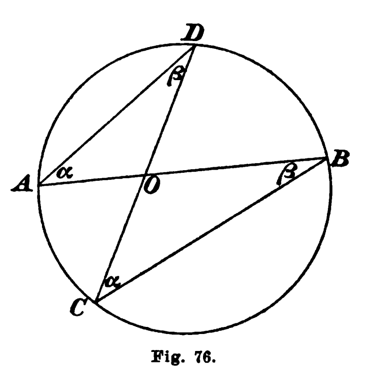


Fig. 76.

Für den Schulunterricht ist zu betonen, daß die Hülfslinien AD und CB in Fig. 76 und AC und BD in Fig. 77 im allgemeinen nicht parallel sind.

Das im Wortlaute des Satzes vorkommende Rechteck kann für beide Figuren zu einem Quadrat werden. Für den äußeren Punkt, Fig. 79, ist dies der Fall, wenn die Gerade OAB zur Tangente wird. Diese durch Fig. 78 dargestellte Besonderheit kann auch durch einen eigenen

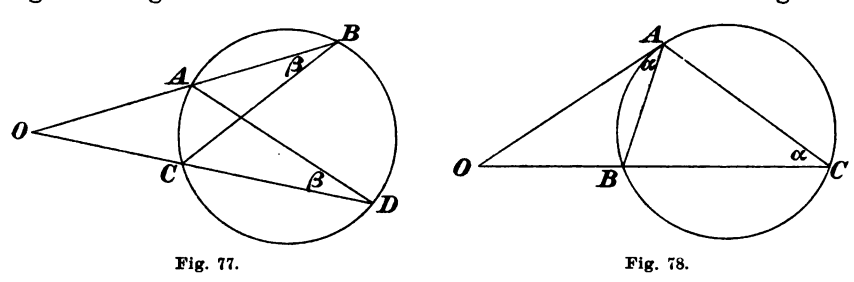


Fig. 77. Fig. 78.

Beweis erhärtet werden. Er ist durch die Winkelbezeichnung $\triangle OAB \sim OCA$, also $OB : OA = OA : OC$ gegeben.

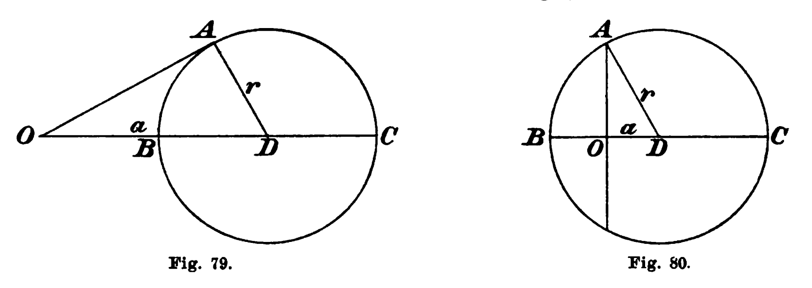


Fig. 79. Fig. 80.

Die geometrische Bedeutung des konstanten Rechtecks, welches den Namen Potenz des Punktes in bezug auf den Kreis führt, zeigt Fig. 79. Es ist $OA^2 = OB \cdot OC = a^2 - r^2$, wenn O den Mittelpunkts-

abstand a und der Kreis den Radius r hat. Ebenso zeigt für einen inneren Punkt Fig. 80 $OA^2 = OB \cdot OC = r^2 - a^2$.

Sobald wir also wieder zur Zählung von einem bestimmten Punkt aus übergehen, erscheinen ungerufen und Erklärung fordernd die Vorzeichen. Den besten Übersichtspunkt liefert auch hier die analytische Geometrie. Sei ein Kreis K mit den Mittelpunktskoordinaten a, b gegeben. Seine Gleichung heißt:

$$F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Für jeden andern Punkt der Ebene x_1, y_1 ist e^2, das Quadrat der Entfernung vom Kreismittelpunkte $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$. Also für einen Punkt außerhalb des Kreises mit der Entfernung e vom Mittelpunkt ist $e^2 - r^2$ oder

$$F(x_1, y_1) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$$

das Quadrat der von (x_1, y_1) an den Kreis K gezogenen Tangente. Hiermit ist die gesuchte Erklärung gegeben. Sie heißt: Sei

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$$

die Gleichung eines Kreises. Dann ist $F(x, y)$ für jeden Punkt (x, y) der Ebene eine festbestimmte Größe. Sie ist positiv für jeden äußeren, negativ für jeden inneren Punkt des Kreises. Sie verschwindet für jeden Punkt der Kreisperipherie. Sie heißt **Potenz** des beliebigen Punktes (x, y) in bezug auf den gegebenen Kreis.

§ 11. Anharmonische Funktion. Harmonische Punkte und Strahlen, Sätze von Menelaus und Ceva, Abbildung.

Auf einer Geraden seien vier Punkte gegeben. Wir betrachten ein Punktepaar B, C als gegeben und festliegend. Für die beiden andern bilden wir die Quotienten $DB:DC$ und $EB:EC$. Dann heißt der Quotient dieser beiden Quotienten das **Doppelverhältnis** oder die **anharmonische Funktion** der vier Punkte.

D E
B C

Fig. 81.

Die Wichtigkeit dieser Funktion ist aus folgender Eigenschaft zu erkennen. Wir greifen irgend einen Punkt O (Fig. 82) der Ebene heraus, verbinden ihn mit den Punkten B, C, D, E und schneiden die Verbindungslinie durch eine willkürliche Gerade, welche auf ihnen die Punkte β, γ, δ, ε bestimmt. **Dann besteht für diese vier Punkte dasselbe Doppelverhältnis.**

Wir führen den Beweis zunächst durch trigonometrische Rechnung. In Fig. 83 bezeichnen wir die Strecken und Winkel wie die Figur zeigt. Die Dreiecke OBD und ODC haben dieselbe Höhe; also

verhält sich ihr Inhalt wie die Grundlinien $DB : DC$. Anderseits ist der Inhalt eines Dreiecks durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmbar nach der Formel $J = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$. Daher wird:

$$DB : DC = \frac{p \sin \lambda}{r \sin \mu}; \quad EB : EC = \frac{p \sin (\lambda + \mu + \nu)}{r \sin \nu}.$$

Also ist der Wert des Doppelverhältnisses

$$\frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EC} = \frac{\sin \lambda}{\sin \mu} : \frac{\sin (\lambda + \mu + \nu)}{\sin \nu}.$$

Das Doppelverhältnis ist also nur von den Winkeln λ, μ, ν abhängig. Folglich bleibt es erhalten, wenn man statt der Geraden $BDCE$

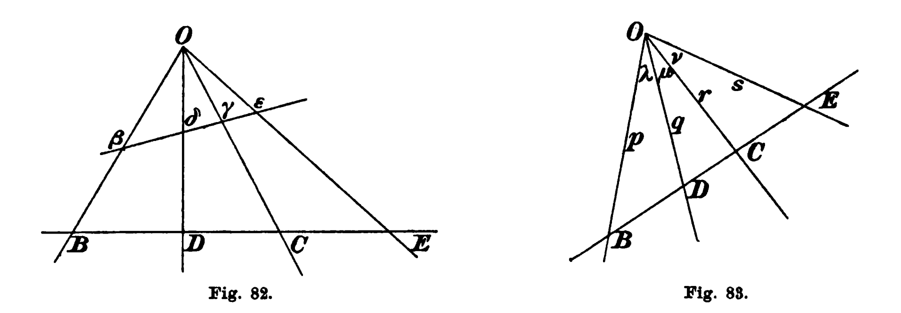


Fig. 82. Fig. 83.

(Fig. 82) eine andere mit den Strahlen OB, OC; OD, OE zum Schneiden bringt. Betrachten wir die Art der Zuordnung genauer. Zunächst ist klar, daß die Zuordnung der Punkte wesentlich ist. Nimmt man statt B, C etwa B, E zu Grundpunkten und bildet das Doppelverhältnis

$$\frac{DB}{DE} : \frac{CB}{CE} = \frac{\sin \lambda}{\sin (\mu + \nu)} : \frac{\sin (\lambda + \mu)}{\sin \nu},$$

so ist dies von dem Doppelverhältnis verschieden, welches wir bisher betrachteten. Es ist aber sehr wichtig, daß der Quotient der Strecken sich auf den Quotienten der Sinus der Strahlenwinkel überträgt. Verbinden wir also die vier Punkte B, C, D, E mit einem anderen Punkte der Ebene, mit O' und bezeichnen die Winkel entsprechend mit λ', μ', ν', so ist das Doppelverhältnis der Sinus der Strahlenwinkel dasselbe wie für λ, μ, ν.

Hieraus folgt insbesondere für harmonische Punkte: Wenn man vier harmonische Punkte mit einem beliebigen außerhalb ihrer Geraden (ihres Trägers) liegenden Punkt verbindet, so ist für die Winkel

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = \frac{\sin (\lambda + \mu + \nu)}{\sin \nu}$$

und jede Gerade schneidet die vier Strahlen in vier harmonischen Punkten unter Festhaltung der Zuordnung. Solche vier Strahlen nennt man harmonische Strahlen. Als besonderen Fall merken wir uns $\lambda = \mu$ und $\nu = 90^0 - \lambda$, dann ist $\lambda + \mu + \nu = 90^0 + \lambda$. In diesem Falle stehen zwei zugeordnete Strahlen aufeinander senkrecht und hälften die Winkel der beiden andern. Diesen Fall zeigen die beiden Winkelhalbierer für das Dreieck.

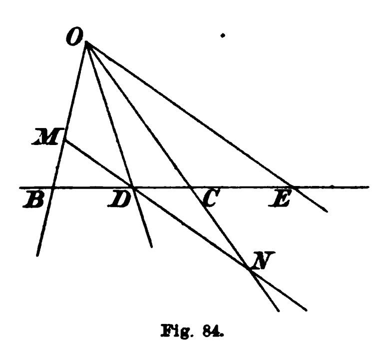


Fig. 84.

Wir wollen jetzt einen zweiten Beweis für den Satz vom Doppelverhältnis führen.

Sei Fig. 84 $MN \parallel OE$. Dann ist

$$\frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EC} = \frac{DB}{EB} : \frac{DC}{EC} = \frac{MD}{OE} : \frac{DN}{OE},$$

also

$$\frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EC} = \frac{MD}{ND}.$$

Ersetzt man nun die Gerade $DBCE$ durch eine andere, die vier festen Strahlen OB, OC; OD, OE schneidende Gerade, so verschiebt sich D auf dem festen Strahl OD, MN bleibt OE, also der ursprünglichen Lage parallel. Es bleibt also der Wert $DM : DN$, folglich auch der Wert des Doppelverhältnisses unverändert.

Die besondere Wichtigkeit der anharmonischen Funktion tritt in der projektiven Geometrie, weniger in der Schulmathematik hervor.

$O \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4$

Fig. 85.

Nehmen wir auf einer Geraden (Fig. 85) einen Zählpunkt O heraus und bestimmen vier Punkte durch ihre zeichenrichtigen Abstände von O. In unserer Figur sind alle positiv. Dann ist

$$F(x_1, x_3, x_2, x_4) = F = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

F hat also in dieser Lage einen negativen Zahlwert. Nun ersetzen wir x_λ durch eine lineare Funktion, also

$$x_\lambda = \frac{\alpha y_\lambda + \beta}{\gamma y_\lambda + \delta}, \quad \lambda = 1, 2, 3, 4.$$

Dann wird

$$x_\lambda - x_\mu = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(y_\lambda - y_\mu)}{(\gamma y_\lambda + \delta)(\gamma y_\mu + \delta)},$$

also

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{\gamma y_2 + \delta}{\gamma y_1 + \delta},$$

$$\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} \cdot \frac{\gamma y_2 + \delta}{\gamma y_1 + \delta},$$

mithin:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}.$$

Durch eine lineare Transformation wird also der Wert des Doppelverhältnisses nicht geändert.

Diese Eigenschaft kann man auch so ausdrücken: Für lineare Transformation eines Punktsystems ist die anharmonische Funktion eine Invariante. Bedeuten x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, so hat dies einen bekannten wichtigen Sinn, der besonders auch bei Behandlung der elliptischen Integrale und ihrer Zurückführung auf die Legendresche Normalform hervortritt.

Wir gehen nunmehr zu den wichtigen Sätzen des Menelaus und Ceva (sprich Tschewa) über.

Eine Linie, welche die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen schneidet, heißt Transversale. Die Ebene zerfällt durch ein Dreieck in sieben Räume, wie Fig. 86 zeigt. Stellen wir die drei Gleichungen der Geraden a, b, c in einer solchen Form auf, daß die linken Seiten für einen Punkt im Innern des Dreiecks sämtlich positiv sind, so kehrt sich das Vorzeichen um bei jedem Überschreiten einer der Geraden. Wir drücken dies kurz aus, indem wir statt a schreiben a_1 usw. Hiernach erhalten die drei Nebenräume der Dreiecksfläche die Bezeichnungen abc_1, ab_1c, a_1bc; die drei Scheitelräume die Bezeichnungen ab_1c_1, a_1bc_1, a_1b_1c.

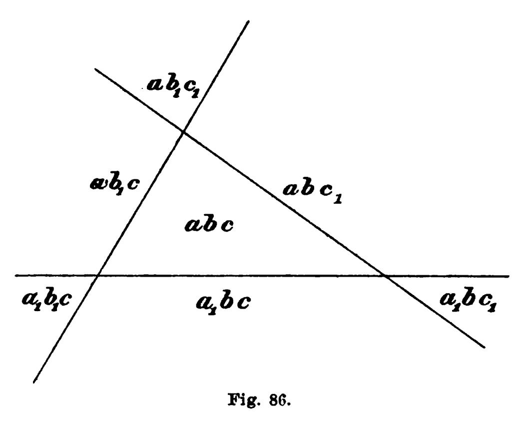


Fig. 86.

Eine Transversale wird nun entweder die Dreiecksfläche schneiden oder nicht. Transversalen, welche durch eine Ecke des Dreiecks gehen, schließen wir aus. Im ersten Falle wird die Transversale zwei Seiten des Dreiecks schneiden, die dritte aber in der Verlängerung. Wenn die Transversale die Dreiecksfläche nicht trifft, so schneidet sie nur Verlängerungen der Dreiecksseiten. Für parallele Linien nehmen wir, um eine für alle Fälle des Satzes passende Rede-

weise zu gewinnen, einen Schnittpunkt im Unendlichen an. Auf den drei Linien AB, AC, BC entstehen also immer drei Teilpunkte und damit drei Teilverhältnisse, die wir folgendermaßen lesen.

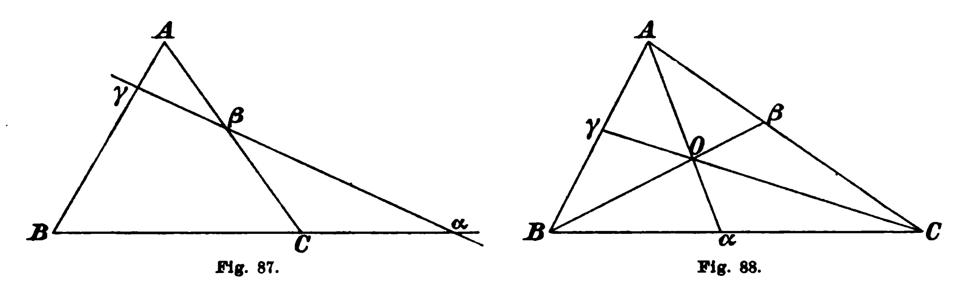


Fig. 87. Fig. 88.

Wir gehen (Fig. 87, 88) von einem beliebigen Teilpunkt α aus und bilden das entsprechende Teilverhältnis $\frac{\alpha B}{\alpha C}$, wobei noch die Wahl zwischen $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ und $\frac{\alpha C}{\alpha B}$ frei steht. Für C ist außer α nur der Teilpunkt β zugänglich. Wir bilden $\frac{\beta C}{\beta A}$. Für A ist außer β nur γ zugänglich. Wir bilden $\frac{\gamma A}{\gamma B}$. Dann ist das Produkt dieser drei Teilverhältnisse zu bilden:

$$Q = \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B}.$$

Wären wir von $\frac{\alpha C}{\alpha B}$ ausgegangen, so hätten wir erhalten:

$$Q' = \frac{\alpha C}{\alpha B} \cdot \frac{\gamma B}{\gamma A} \cdot \frac{\beta A}{\beta C}.$$

Auf eines dieser Produkte Q oder Q' stößt man immer, auch wenn man von einem der andern Teilpunkte β oder γ statt α ausgeht.

Der Satz des Menelaus heißt nun:

Jede Nichtecktransversale bestimmt auf den Dreiecksseiten drei Punkte und durch diese drei Teilverhältnisse. Das Produkt der Teilverhältnisse ist Eins.

Den Beweis führt man, indem man (Fig. 89) durch A, B, C drei Parallele zieht und mit der Transversale zum Schneiden bringt:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{BE}{CF}; \quad \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{CF}{AD}; \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{AD}{BE}.$$

Das Produkt ist Eins.

Wir bezeichnen bisheriger Übung gemäß die Strecken AB, AC, BC als Seiten, die unbegrenzten Teile als Verlängerungen der Dreiecksseiten. Dann ist folgende Zusammenstellung denkbar:

1)	3 Verlängerungen	0	Seiten,
2)	2 „	1	„
3)	1 „	2	„
4)	0 „	3	„

Im Satze des **Menelaus** kommen die Zusammenstellungen 1) und 3) vor. Sollte nicht auch für die beiden andern ein Satz bestehen?

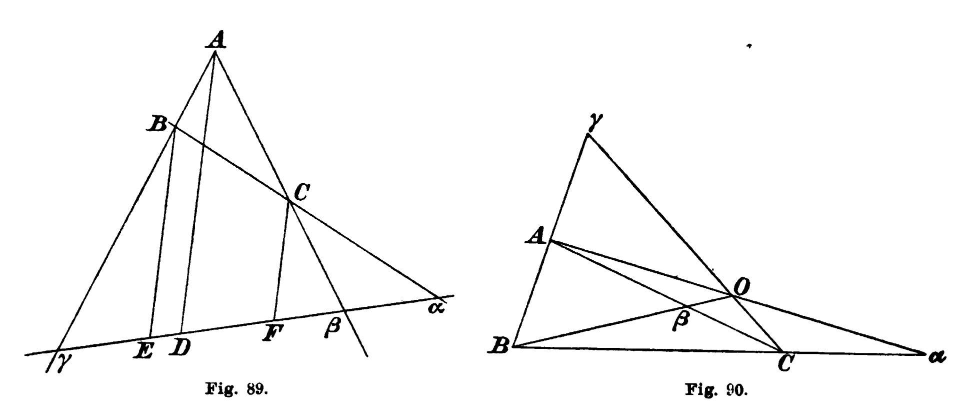


Fig. 89. Fig. 90.

Wir stellen dem Dreieck ABC (Fig. 88) einen Punkt O gegenüber und ziehen OA, OB, OC. Diese Ecktransversalen treffen entweder die drei Seiten oder (Fig. 90) eine Seite und zwei Verlängerungen. Das entspricht den bisher fehlenden Zusammenstellungen 2) und 4). Der entsprechende Satz ist der des **Ceva** und heißt:

Drei durch einen Punkt gehende Ecktransversalen bestimmen auf drei Dreiecksseiten oder einer Dreiecksseite und zwei Verlängerungen drei Punkte und damit drei Teilverhältnisse. Das Produkt der Teilverhältnisse richtig gelesen ist Eins.

Der Beweis kann am einfachsten durch Betrachtung der drei Dreiecke AOB, AOC, BOC geführt werden. Bezeichnet man ihre Inhalte mit I_3, I_2, I_1, so ist

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{I_3}{I_2}, \quad \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{I_1}{I_3}, \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Dies ergibt sich sofort z. B. für $\alpha B : \alpha C = I_3 : I_2$, wenn man auf AO, die den Dreiecken gemeinsame Linie, von B und C die Höhen fällt. Die Multiplikation obiger Gleichungen gibt Eins.

Ein zweiter Beweis, der dem Gedankengange des Entdeckers folgt, beschwert den Punkt O (Fig. 88) mit der Last P und sucht die Verteilung der Last auf die Punkte A, B, C. Sei A mit x, B mit y,

C mit z belastet. Dann ist $x + y + z = P$. Ferner ist nach dem Hebelgesetz

$$AO \cdot x = O\alpha \cdot (P - x) = O\alpha \cdot (y + z)$$

und die Belastung $y + z$ in α verteilt sich auf B und C so, daß

$$\alpha B \cdot y = \alpha C \cdot z.$$

Daher folgt

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{z}{y} \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{y}{x}.$$

Beide Sätze lassen sich umkehren. Der Wortlaut der Umkehrungen heißt:

1. Sind auf den drei Verlängerungen oder auf zwei Seiten und einer Verlängerung drei Punkte derart gegeben, daß das Produkt der Teilverhältnisse richtig gelesen Eins ist, so liegen die drei Punkte in gerader Linie.

2. Sind auf den drei Seiten oder auf einer Seite und zwei Verlängerungen eines Dreiecks drei Punkte derart gegeben, daß das Produkt der Teilverhältnisse richtig gelesen Eins ist, so schneiden die zu den Teilpunkten von den Gegenecken gezogenen Linien sich in einem Punkte.

Der Beweis muß vier Fälle unterscheiden. Er wird für jeden Fall besonders geführt und verläuft in allen vier Fällen auf dieselbe Weise. Nehmen wir den Fall des Ceva, den Fig. 89 darstellt, als Beispiel.

Voraussetzung. α, β, γ liegen auf den Seiten des Dreiecks und es ist

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1.$$

Behauptung. $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ laufen durch einen Punkt.

Beweis. a) Weil β und γ auf den Dreiecksseiten liegen, schneiden $B\beta$ und $C\gamma$ sich im Innern des Dreiecks. Der Schnittpunkt sei O. Dann schneidet auch OA die Dreiecksseite BC und nicht die Verlängerung.

b) Angenommen AO treffe BC in α' und nicht in α. Dann wäre nach dem Satze des Ceva

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1,$$

während nach der Voraussetzung sich $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ in dieser Gleichung statt $\frac{\alpha' B}{\alpha' C}$ findet. Es müßte also sein

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{\alpha' B}{\alpha' C},$$

was den Ausführungen S. 213—214 widerspricht.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile, die wir durch a), b) gekennzeichnet haben. Der Teil a) gehört der analysis situs an, darf aber unter keinen Umständen vernachlässigt werden.

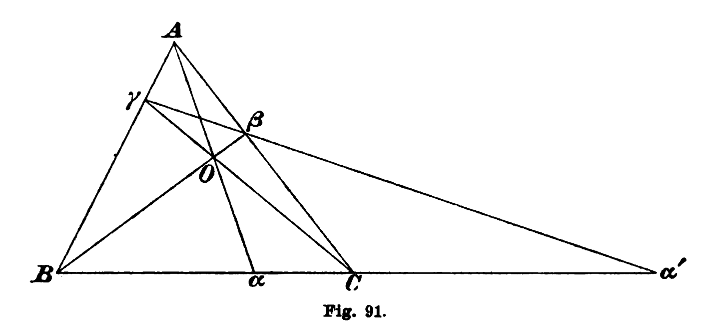


Fig. 91.

Wir schreiten jetzt zu den Anwendungen des Menelaus und Ceva. Verbinden wir (Fig. 91) die Punkte $\beta\gamma$, so ist nach Ceva

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1$$

und nach Menelaus

$$\frac{\alpha' B}{\alpha' C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1,$$

folglich

$$\alpha B:\alpha C=\alpha' B:\alpha' C.$$

Die vier Punkte B, C; α, α' sind harmonisch. Hierauf beruht die Möglichkeit, den zugeordneten Punkt zu α, wenn B, C; α gegeben sind, lediglich mit Hülfe des Lineals zu finden.

Bemerken wir, daß OB, OC; $O\alpha$, $O\alpha'$ harmonische Strahlen sind, so ergeben sich weitere harmonische Punktepaare auf $\beta\gamma$. Diese Eigenschaften wollen wir zusammenfassend weiter unten (Viereck, Vierseit) behandeln.

Noch wichtiger als die Sätze des Menelaus und Ceva sind ihre Umkehrungen.

1. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Das Teilverhältnis der Seiten ist $\alpha B:\alpha C=1$.

2. Die drei Halbierer der Innenwinkel schneiden sich in einem Punkte. Es ist

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{c}{b},\quad \frac{\beta C}{\beta A}=\frac{a}{c},\quad \frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{b}{a}.$$

Das Produkt ist also Eins.

3. Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte. Es ist

$$\alpha B=c\cos B,\quad \alpha C=b\cos C,\quad \beta C=a\cos C,\quad \beta A=c\cos A,$$
$$\gamma A=b\cos A,\quad \gamma B=a\cos B.$$

15*

4. Die Verbindungslinien der Dreiecksecken mit den Berührungspunkten des Inkreises an den Gegenseiten schneiden sich in einem Punkte. Es ist

$$\alpha B = \gamma B, \quad \alpha C = \beta C, \quad \beta A = \gamma A.$$

5. Teilt man die Gegenseiten im Verhältnis der Quadrate der Dreiecksseiten, so laufen die betreffenden Ecktransversalen durch einen Punkt.

6. Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen in einer geraden Linie; ebenso je zwei innere und ein äußerer Ähnlichkeitspunkt.

7. Die drei Halbierer der Außenwinkel treffen die Geraden der Gegenseiten in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen.

8. Zieht man in den Eckpunkten eines Dreiecks an den Umkreis Tangenten, so schneiden sie die Geraden der Gegenseiten in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen.

Die Treffpunkte teilen die Gegenseiten im Verhältnis der Quadrate der beiden anderen Dreiecksseiten.

9. Die beiden Sätze des **Menelaus** und **Ceva** lassen sich noch zu folgender Schlußweise verbinden. Sei (Fig. 92) ein Punkt O gegeben. Wir ziehen OA, OB, OC und erhalten so die Punkte α, β, γ. Wir ziehen $\alpha\beta$, es bestimmt auf AB den Punkt γ'; ebenso $\beta\gamma$, es bestimmt auf BC den Punkt α'; endlich $\alpha\gamma$, welches auf AC den Punkt β' bestimmt. Die drei Punkte α', β', γ' liegen in gerader Linie. So bestimmt ein Punkt durch Zuordnung zum Dreieck eindeutig eine Gerade o.

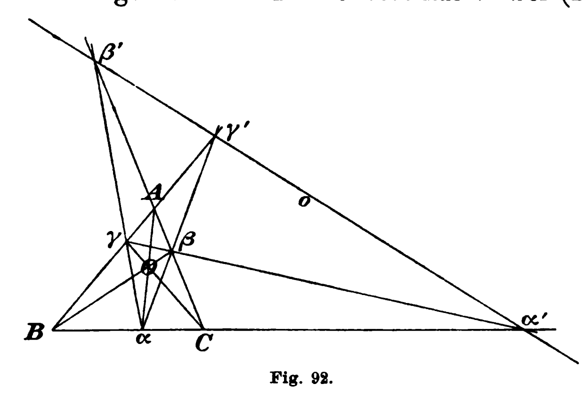


Fig. 92.

Dieser Gedankengang läßt sich umkehren. Die Gerade o bestimmt auf den Dreiecksseiten die Punkte α, β, γ. Wir bestimmen die zugeordneten harmonischen α', β', γ'. Dann laufen $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ durch einen Punkt O.

Bewegt sich O auf irgend einer Kurve, so bewegt sich auch o und umhüllt dabei eine bestimmte, der Kurve von O reziproke. Diese Verhältnisse treten jedoch weit übersichtlicher am Kreise hervor und werden daher am besten am Kreise studiert.

§ 12. Abbildung. Pol und Polare.

In der Schulgeometrie unterscheiden wir nur zwei Arten von Abbildungen, die ähnliche und die umgekehrte. Die erstere erklären wir folgendermaßen.

Sei ein Punkt O (Fig. 93) (Augenpunkt) und ein weiterer beliebiger Punkt A gegeben. Wir ziehen OA und bestimmen auf OA einen Punkt A' derartig, daß ist

$$OA : OA' = m,$$

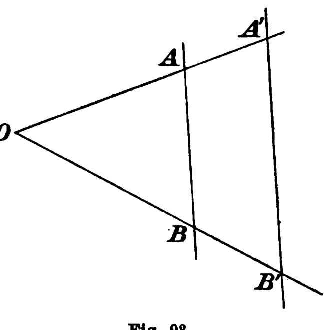


Fig. 93.

wo m eine beliebige gegebene Zahl ist. Der Sinn der Abtragung der Strecke OA' von O aus kann mit OA stimmen oder entgegengesetzt sein. Der Sinn der Abtragung ist wie die Zahl m vorher festgelegt und gehört wesentlich zur Bestimmung der Abbildung. Man kann auch m Vorzeichen beilegen und damit die Festsetzung des Sinnes in gleichem Sinne $(+ m)$ oder in entgegengesetztem $(- m)$ zum Ausdruck bringen.

Bei der ähnlichen Abbildung verwandelt sich ein Punkt in einen Punkt, eine Gerade in eine parallele Gerade, ein Kreis in einen Kreis, der gegen den ursprünglichen Kreis so liegt, daß der Augenpunkt innerer oder äußerer Ähnlichkeitspunkt wird. Stets liegen Punkt, Bild des Punktes und Augenpunkt in gerader Linie. Diese Eigenschaft der ähnlichen Abbildung ist für die Anwendungen von entscheidender Bedeutung.

Als Beispiel betrachten wir ein beliebiges Dreieck, machen den Schwerpunkt zum Augenpunkt und nehmen das Verhältnis der Abbildung $1 : 2$, den Sinn der Abtragung entgegengesetzt. Dann verwandeln sich die Seiten des Dreiecks in Parallele durch die Gegenecken. Der Höhenpunkt des Dreiecks $A'B'C'$ in den Höhenpunkt des Dreiecks ABC, weil jede Höhe von $A'B'C'$ in die entsprechende Höhe von ABC übergeht. Dasselbe gilt vom Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises. Nun ist aber der Höhenpunkt des Dreiecks ABC zugleich Mittelpunkt des Umkreises von $A'B'C'$. Die drei Punkte: Höhenpunkt $A'B'C'$, Schwerpunkt $A'B'C'$, Höhenpunkt ABC bilden eine gerade Linie, folglich für jedes beliebige Dreieck: Höhenpunkt, Schwerpunkt, Mittelpunkt des Umkreises. Der Schwerpunkt trennt die beiden andern Punkte, so daß der Höhenpunkt den doppelten Abstand des andern Punktes hat.

Ein zweiter Beweis beschränkt sich auf die Betrachtung des Dreiecks ABC. Sei AD Höhe, ME Mittelsenkrechte. Da $SA : SE = 2 : 1$,

so ist auch $SH:SM$, wenn H und M beliebige Punkte der sich bildweise entsprechenden Parallelen AD und ME sind. Dieselbe Betrachtungsweise gilt für jede der drei Höhen und Mittelsenkrechten, also auch für ihre Schnittpunkte.

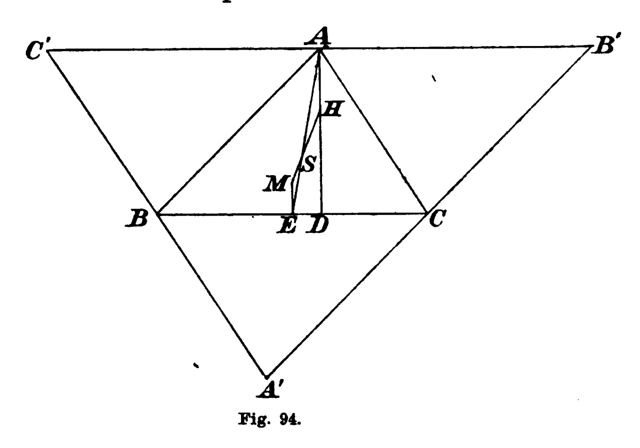


Fig. 94.

Das Dreieck ABC ist dem Dreieck $A'B'C'$ auch noch in anderer Weise zugeordnet. F sei die Mitte von AC, G von AB. A entspricht E, B dem F, C dem G; deshalb auch, wenn man ASE um S dreht, C' dem C, B' dem B, A' dem A. Folglich ist

$$SA' = 2SA, \quad SB' = 2SB, \quad SC' = 2SC.$$

Bei der ähnlichen Abbildung des Kreises sind die Mittelpunkte entsprechende Punkte.

Die Methode, die Ähnlichkeitspunkte aufzufinden, besteht in der Herstellung eines Paares paralleler Radien. Für den Unterricht ist eine nützliche Übung, die drei Hauptfälle und die zwei Grenzfälle der gegenseitigen Lage zweier Kreise mit dieser Aufgabe in Beziehung zu bringen; vgl. S. 196 und 217.

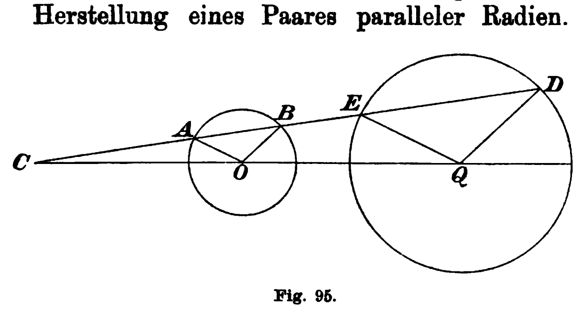


Fig. 95.

Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt eine Gerade, so trifft sie die beiden Kreise entweder nicht oder die zu den Treffpunkten gezogenen Radien sind parallel.

Sei C (Fig. 95) der Ähnlichkeitspunkt, also $CO : CQ = r : \varrho$. Eine Gerade treffe den Kreis O in A und B. Wir ziehen $QE \parallel OA$ und $QD \parallel OB$. Dann ist $CO : CQ = OA : QE = r : \varrho$, also $r : QE = r : \varrho$,

$QE = \varrho$. Ebenso gelingt der Beweis für QD. Die Punkte E und D sind also Punkte des Kreises Q und die Radien zu den Treffpunkten sind den entsprechenden Radien des Kreises O parallel, w. z. b. w.

Die umgekehrte Abbildung ist folgendermaßen zu erklären. Sei gegeben ein Punkt O (Augenpunkt) und ein Quadrat m^2 (Potenz). Wir verbinden O mit einem beliebigen Punkte A der Ebene und bestimmen auf OA einen Punkt B derartig, daß $OA \cdot OB = m^2$ wird. Dann heißt B die umgekehrte Abbildung (Inversion) von A. Die Abbildung kann gleichsinnig oder ungleichsinnig sein, je nachdem B von O aus gesehen mit A auf demselben Strahl liegt oder nicht. Führen wir Vorzeichen ein, so kann man die beiden Fälle von einander trennen, indem man die Potenz positiv oder negativ nimmt, also

$$OA \cdot OB = m^2$$

oder

$$OA \cdot OB = -m^2$$

(ungleichsinnige Inversion). Da bei einer Inversion die Potenz unverändert bleibt, ist die Einführung der Streckenvorzeichen ohne besondere Wichtigkeit.

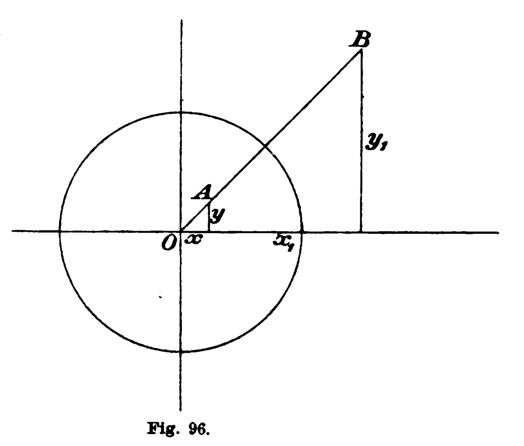


Fig. 96.

Beschreibt man um O mit dem Radius m einen Kreis, so entsprechen die Punkte des Kreises bei der umgekehrten Abbildung sich selbst. Bei der gleichsinnigen Abbildung fallen die entsprechenden Punkte paarweise zusammen, bei der ungleichsinnigen bilden sie Endpunkte von Durchmessern. Punkte im Innern des Kreises bilden sich auf außerhalb liegenden Punkten ab und umgekehrt. Den unendlich fernen Punkten entspricht der Mittelpunkt des Kreises.

In der analytischen Geometrie entspricht ein Punkt A (x, y) dem Punkte $B(x_1, y_1)$ (Fig. 96), wenn beide auf derselben durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden liegen und $OA \cdot OB = m^2$ ist. Also haben wir

$$x : y = x_1 : y_1 \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = m^2.$$

Dies kann man in die Gleichungen zusammenfassen:

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} m^2, \qquad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2} m^2,$$

oder noch einfacher in eine einzige Gleichung:

$$x_1 + y_1 i = m^2 \frac{x + yi}{x^2 + y^2} = m^2 \cdot \frac{1}{x - yi}.$$

Wenn man die Gleichung aufstellt:

$$x_1 + y_1 i = F(x + yi) \quad \text{oder auch} \quad x_1 + y_1 i = F(x - yi),$$

wo F eine willkürliche reelle analytische Funktion bedeutet, so hat man die allgemeine Abbildung.

Wir wollen nach dieser Abschweifung zur elementaren Behandlung der umgekehrten Abbildung zurückgehen.

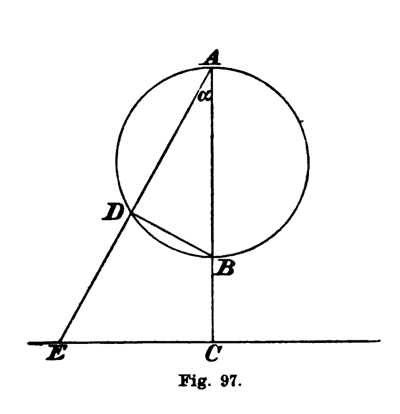


Fig. 97.

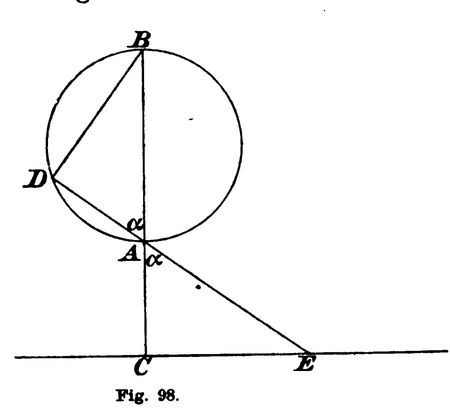


Fig. 98.

Erster Satz. Das Bild einer Geraden ist ein Kreis, welcher durch den Augenpunkt geht und dessen Mittelpunkt auf der vom Augenpunkt zur Geraden gefällten Senkrechten liegt.

Es ist (Fig. 97, 98):

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE},$$

folglich

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC = m^2.$$

Der Beweisgrund liegt darin, daß die Punkte A, B, C durch Kreis und Gerade unverändert gegeben sind. Wenn Punkt E die Gerade durchläuft, so durchwandert D den Kreis, aber das Produkt $AD \cdot AE$ ist dabei unveränderlich.

Fig. 97 bringt die gleichsinnige, Fig. 98 die ungleichsinnige umgekehrte Abbildung zur Anschauung. Der sich selbst entsprechende Kreis mit dem Radius m hat den Augenpunkt A zum Mittelpunkt. Um den Radius zu bestimmen, beschreiben wir über BC einen Kreis, an den wir in Fig. 97 von A aus eine Tangente ziehen. Die begrenzte Tangente ist der Radius m. In Fig. 98 beschreiben wir über BC als Durchmesser einen Kreis und errichten zu AB in A die senkrechte Sehne. Die Halbsehne ist m. In Fig. 99 ist $AD \cdot AE = AC \cdot AB = m^2$, also $AF = m$. Ein mit AF um A beschriebener Kreis enthält die sich selbst entsprechenden Punkte.

Zweiter Satz. Die umgekehrte Abbildung eines Kreises ist wieder ein Kreis und zwar ist der Kreis identisch mit dem in der ähnlichen Abbildung erhaltenen. Die Zuordnung der Punkte ist jedoch anders. Augenpunkt ist der Ähnlichkeitspunkt. Die Mittelpunkte der Kreise sind in der umgekehrten Abbildung einander nicht entsprechend.

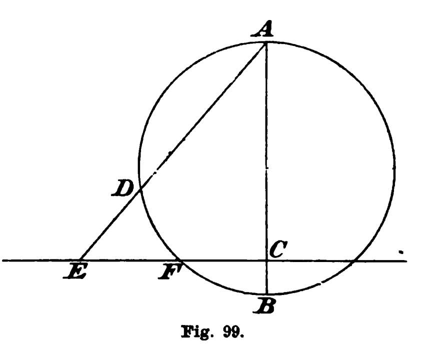


Fig. 99.

Fig. 100 stellt zwei Kreise um K und L dar. BK und DL seien parallele Radien. Daher ist A äußerer Ähnlichkeitspunkt. Es ist $AK : AL = r : \varrho$, wenn $BK = r$, $DL = \varrho$. Auch $KC \parallel LE$ ergibt die in der Figur angedeutete Winkelberechnung. Durchläuft F den Kreis um K, so durchwandert der in ähnlicher Abbildung dem F entsprechende Punkt H den Kreis um L. Es entsprechen sich in ähnlicher Abbildung die Punkte $\overset{1}{F}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{G}, \overset{5}{M}$ und $\overset{1}{H}, \overset{2}{D}, \overset{3}{E}, \overset{4}{I}, \overset{5}{N}$. K entspricht L.

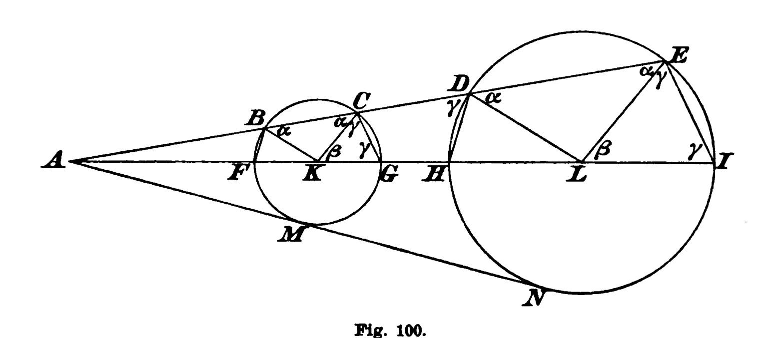


Fig. 100.

Nun behaupten wir, daß in derselben Figur sich auch eine umgekehrte Abbildung befindet. Da $BK \parallel DL$, so ergibt sich die Gleichheit der mit β und daraus die Gleichheit der mit γ bezeichneten Winkel. Die Figuren $BFGC$ und $DHIE$ sind Kreisvierecke und folglich ist $\sphericalangle FBC = 180 - \gamma = \sphericalangle HDE$. Also $HDC = \gamma$. Daher sind nun auch die Figuren $FBEI$ und $GCDH$ Kreisvierecke und es ist

$$AF \cdot AI = AB \cdot AE; \quad AG \cdot AH = AC \cdot AD.$$

Dreht man den Strahl $ABCDE$ in die Lage AMN, so folgt, daß $AB \cdot AE = AM \cdot AN$ ist. Damit ist nun auch zwischen den Pro-

dukten $AF \cdot AI$ und $AG \cdot AH$ die Gleichheitsbrücke geschlagen und der Satz bewiesen. Es ist

$$AM \cdot AN = AF \cdot AI = AB \cdot AE = AC \cdot AD = AG \cdot AH = m^2.$$

In umgekehrter Abbildung entsprechen sich also die Punkte

$$\overset{1}{F}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{G}, \overset{5}{M} \text{ und } \overset{1}{I}, \overset{2}{E}, \overset{3}{D}, \overset{4}{H}, \overset{5}{N}.$$

Greifen wir diese Verhältnisse rechnerisch an. Sei

$$KL = a, \quad AK = x.$$

Dann ist

$$x : r = (x + a) : \varrho, \quad x = \frac{ar}{\varrho - r}, \quad a + x = \frac{a\varrho}{\varrho - r},$$

$$AF = x - r = \frac{r^2 - r\varrho + ar}{\varrho - r}, \quad AG = x + r = \frac{-r^2 + ar + r\varrho}{\varrho - r},$$

$$AH = a + x - \varrho = \frac{a\varrho - \varrho^2 + r\varrho}{\varrho - r}, \quad AI = a + x + \varrho = \frac{a\varrho + \varrho^2 - r\varrho}{\varrho - r},$$

$$AF \cdot AI = \frac{r\varrho}{(\varrho - r)^2}(r + a - \varrho)(-r + a + \varrho) = AG \cdot AH,$$

$$AM^2 = \frac{r^2}{(\varrho - r)^2}(r + a - \varrho)(-r + a + \varrho);$$

$$AN^2 = \frac{\varrho^2}{(\varrho - r)^2}(r + a - \varrho)(-r + a + \varrho).$$

Sollten K und L entsprechende Punkte sein, so müßten sich ergeben

$$a^2 = (a + r - \varrho)(a - r + \varrho),$$

also $r = \varrho$. In diesem Falle liegt A im Unendlichen, und von einer umgekehrten Abbildung mit unendlich großer Potenz werden wir absehen.

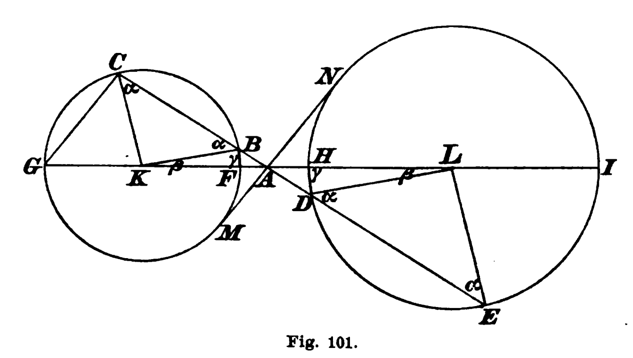


Fig. 101.

Für den inneren Ähnlichkeitspunkt liegen die Verhältnisse entsprechend. In Fig. 101 sei $LD \parallel KB$, dann ist auch $LE \parallel KC$. Also sind $\sphericalangle LDH = KFB = \gamma = 90 - \frac{\beta}{2}$, folglich $\sphericalangle GCA = 180 - \gamma = AHD$.

Daher stehen über DG die beiden gleichen Winkel $DCG = DHG$, also ist $DHCG$ Kreisviereck und $AH \cdot AG = AC \cdot AD$. Ebenso stehen über BI die gleichen Winkel BFI und $BEI = \gamma' = 90 + \frac{\beta}{2}$. Folglich ist auch $BFEI$ Kreisviereck und $AF \cdot AI = AB \cdot AE$. Drehen wir den beliebigen Ähnlichkeitsstrahl BAE in die Lage MAN, so folgt

$$AF \cdot AI = AG \cdot AH = AB \cdot AE = AC \cdot AD = AM \cdot AN.$$

Greifen wir nunmehr unter Beibehaltung der Benennungen $KC = r$, $LD = \varrho$, $KL = a$ dies rechnerisch an. $AK = x$. Es ist

$$x : (a - x) = r : \varrho,$$

$$x = \frac{ar}{r + \varrho}, \quad a - x = \frac{a\varrho}{r + \varrho},$$

$$AF = x - r = \frac{ar - r^2 - r\varrho}{r + \varrho}, \quad AG = x + r = \frac{ar + r^2 + r\varrho}{r + \varrho}.$$

$$a - x - \varrho = AH = \frac{a\varrho - r\varrho - \varrho^2}{r + \varrho}; \quad a - x + \varrho = \frac{a\varrho + r\varrho + \varrho^2}{r + \varrho} = AI.$$

$$AF \cdot AI = \frac{r\varrho}{(r + \varrho)^2}(a - r - \varrho)(a + r + \varrho) = AH \cdot AG.$$

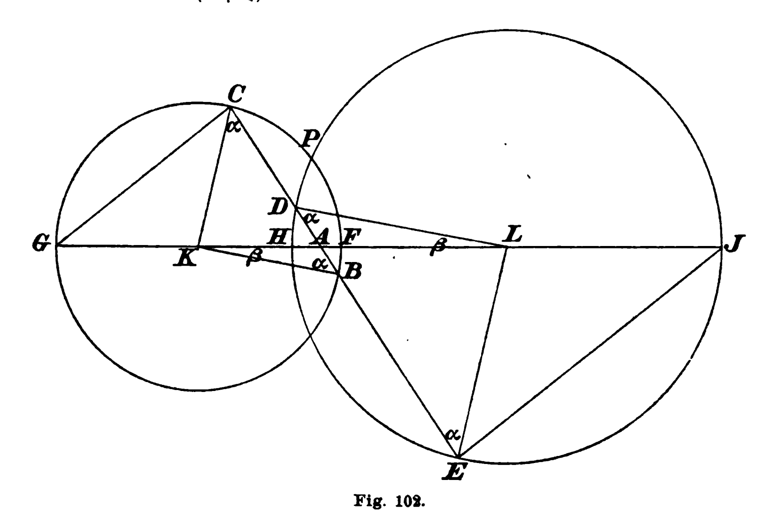


Fig. 102.

Entsprechende Punkte sind in ähnlicher ungleichsinniger Abbildung G, C, M, B, F und I, E, N, D, H; in umgekehrter ungleichsinniger Abbildung G, C, M, B, F und H, D, N, E, I. In ungleichsinniger umgekehrter Abbildung kommen sich selbst entsprechende Punkte nicht vor. Der sich selbst entsprechende Kreis hat A zum Mittelpunkt. Beschreibt man über FI als Durchmesser einen Kreis

und errichtet in A zu FI eine Senkrechte, so erhält man den Radius. Die Mittelpunkte K, L sind nicht entsprechende Punkte.

Wenn die Kreise um K und L einander schneiden (Fig. 102), so entsteht ein Dreieck mit den Seiten a, r, ϱ. Die Augenpunkte der Abbildung werden dann Schnittpunkte der Winkelhalbierer mit der Seite a, weil sie diese im Verhältnisse der Radien teilen. Bei dem äußeren Winkelhalbierer geht der Strahl durch zwei zusammenfallende entsprechende Punkte, die Schnittpunkte der Kreise, ist also w_a die Länge des Winkelhalbierers, so ist w_a^2 Potenz der Abbildung,

$$w_a^2 = \frac{r\varrho}{(r-\varrho)^2}(a+r-\varrho)(a-r+\varrho).$$

Für den inneren Ähnlichkeitspunkt ist die Abbildung ebenfalls gleichsinnig. Es ist $\sphericalangle GKB = 180 - \beta$, daher $\sphericalangle GCB = 90 - \frac{\beta}{2}$. Ferner ist $\sphericalangle DHL = 90 - \frac{\beta}{2}$, also $GCDH$ Kreisviereck und $AH \cdot AG = AD \cdot AC$. Ebenso ist $AB \cdot AE = AF \cdot AI$ und beide Produkte gehen bei der Drehung des Strahles in AP^2 über, also

$$AH \cdot AG = AD \cdot AC = AB \cdot AE = AF \cdot AI = AP^2.$$

Rechnerisch ergibt sich bei Festhaltung der Bezeichnungen

$$AK = x, \quad KL = a, \quad KB = r, \quad LD = \varrho,$$

$$x = \frac{ar}{r+\varrho}, \quad a - x = \frac{a\varrho}{r+\varrho}, \quad AG = x + r = \frac{ar + r^2 + r\varrho}{r+\varrho},$$

$$AH = x - (a-\varrho) = \frac{r\varrho + \varrho^2 - a\varrho}{r+\varrho}, \quad AI = a - x + \varrho = \frac{a\varrho + r\varrho + \varrho^2}{r+\varrho},$$

$$AF = r - x = \frac{r^2 + r\varrho - ar}{r+\varrho}.$$

Also

$$AH \cdot AG = AF \cdot AI = \frac{r\varrho}{(r+\varrho)^2}(r+\varrho+a)(r+\varrho-a).$$

Für AP, den Winkelhalbierer w im Dreieck r, ϱ, a erhalten wir demnach den Ausdruck:

$$w^2 = \frac{r\varrho}{(r+\varrho)^2}(a+r+\varrho)(-a+r+\varrho).$$

Dritter Satz. Die umgekehrte Abbildung ist winkeltreu. Der Winkel zweier Kreise ist der Winkel der Tangenten in den beiden Schnittpunkten. Dafür kann man auch den Winkel der beiden Radien einsetzen, weil diese auf den zugehörigen Tangenten senkrecht stehen. Beim Schneiden von zwei Geraden entstehen immer zwei Paare Scheitelwinkel. Um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, fassen wir immer nur die entstehenden spitzen Winkel ins Auge.

Nach diesen Vorbemerkungen ergibt Fig. 103 die Richtigkeit des Satzes. Das Bild der Geraden OB ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf AB liegt. Er geht durch den Augenpunkt A, also ist AB die Richtung des Radius des Bildkreises. Ebenso ist AC die Richtung des Radius des Bildkreises von OC. Die Radien bilden denselben spitzen Winkel α wie die abgebildeten Geraden.

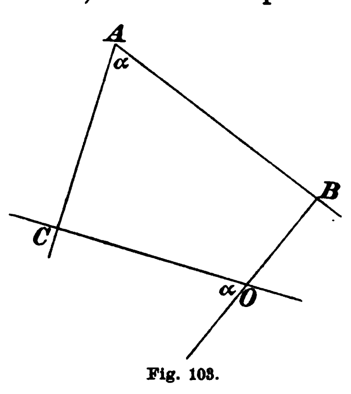


Fig. 103.

Bildet man also ein geradliniges Dreieck ab, so erhält man als Bild drei Kreisbogen, welche sich unter denselben Winkeln schneiden wie die Seiten des abgebildeten Dreiecks. Wenn zwei Linien sich rechtwinklig schneiden, so tun es auch ihre Bilder. Berührung bleibt in der Abbildung Berührung. Hiermit ist eine sehr ergiebige Quelle erschlossen zur Stellung und Lösung der wichtigsten geometrischen Aufgaben.

Die umgekehrte Abbildung hat Beziehung zur harmonischen Teilung. Seien AB, CD (Fig. 104) vier harmonische Punkte in der durch diese Schreibung angedeuteten Zuordnung. O sei die Mitte von AB, $OA = OB = m$, $OC = x$, $OD = y$. Dann ist

$$(x + m) : (m - x) = (y + m) : (y - m),$$

oder:

$$(x + m)(y - m) = (m - x)(y + m),$$

oder:

$$xy = m^2.$$

O ist der Mittelpunkt der umgekehrten Abbildung, die Potenz ist m^2, D und C sind entsprechende Punkte, A entspricht sich selbst, ebenso B. Die Abbildung ist gleichsinnig. Beschreibt man über CD als Durchmesser einen Kreis und zieht von O aus eine Sekante, so ist $OC \cdot OD = OE \cdot OF = OG^2$. Da nun $OC \cdot OD = m^2$, so ist $OG = m$. G gehört dem um O mit m beschriebenen Kreise an, E und F sind entsprechende Punkte. Folglich entspricht der Kreis $CEFDG$ in der Abbildung sich selbst. Hierin kann man nun noch weiter gehen. Legt man irgend einen Kreis durch die Punkte CD, so

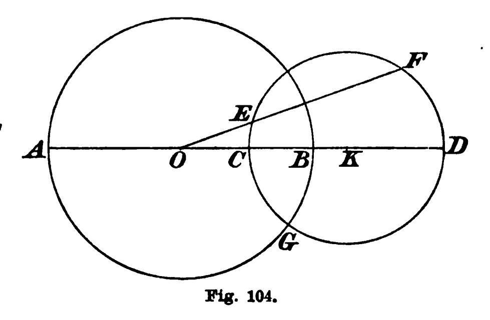


Fig. 104.

entspricht auch er in der Abbildung sich selbst. Eine von O an ihn gezogene Tangente hat die Länge m. Ist K die Mitte von CD, so ist KG der Berührungsradius. Folglich $KG \perp OG$ und deshalb schneidet der um O mit m beschriebene Kreis den über DC als Durchmesser stehenden senkrecht. Er schneidet aber auch jeden der durch CD gelegten Kreise senkrecht.

Verfolgen wir zunächst die Gesamtheit der Kreise, für welche die verschiedenen harmonischen Punktepaare CD Endpunkte von Durchmessern sind. Sie bilden ein Kreisbüschel (vgl. S. 216), dem die Punkte A und B jeder als unendlich kleine Kreise angehören. Die Mittelsenkrechte zu AB ist ein unendlich großer Kreis des Büschels. Die Kreise des Büschels werden sämtlich von dem mit m um O beschriebenen rechtwinklig geschnitten. Setzen wir $OC = p$, so ist $OD = \frac{m^2}{p}$, $OD - OC = \frac{m^2}{p} - p$, also $KC = \frac{1}{2}\frac{m^2 - p^2}{p}$ und $OK = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{p} + p\right)$. Die Gleichung des Kreises wird, wenn wir O zum Koordinatenanfang und OB als x-Achse nehmen:

$$\left(x - \frac{1}{2}\frac{m^2 + p^2}{p}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{m^2 - p^2}{p}\right)^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 - \frac{m^2 + p^2}{p}x + m^2 = 0.$$

Verbinden wir mit dieser Gleichung die eines andern Kreises des Büschels, etwa

$$x^2 + y^2 - \frac{m^2 + q^2}{q}x + m^2 = 0,$$

so findet man nach Subtraktion $x = 0$ und dann nach Einsetzung dieses Wertes $y^2 + m^2 = 0$, $y = \pm mi$. Überträgt man die Redeweise, welche bei Deutung der obigen Gleichungslösung für reelle Werte anschaulichen Sinn hat, auf diesen Fall, so können wir sagen: Alle Kreise des Büschels gehen durch das imaginäre Punktepaar:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = mi, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -mi$$

und haben also zwei feste imaginäre Schnittpunkte.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir die betreffenden Entwicklungen für ein Büschel mit reellen Schnittpunkten zum Vergleich heranziehen. Die beiden Punkte C und D liegen dann auf verschiedenen Seiten von O. Ist $OC = p$, so ist OD seiner Größe nach $\frac{m^2}{p}$, der Radius des Kreises ist $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{p} + p\right)$ und der Mittelpunktsabstand von O ist gleich dem Radius vermindert um p. Die Gleichung des Kreises, eines willkürlichen Kreises des Büschels, wird

$$x^2 + y^2 - \frac{m^2 - p^2}{p}x - m^2 = 0.$$

Alle Kreise des Büschels gehen durch das reelle Punktepaar

$$x_1 = 0, \quad y_1 = m; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -m.$$

In diesem Falle sind die Punkte C, D zwei einander in ungleichsinniger umgekehrter Abbildung entsprechende Punkte.

Seien (Fig. 105) wieder A und B zwei einander in gleichsinniger umgekehrter Abbildung entsprechende Punkte, die Potenz der Abbildung $KC^2 = KD^2 = m^2$. Wir errichten in A und B zu AK die Senkrechten AG und BI. Dann heißt A der Pol, BI seine Polare und ebenso B der Pol, AG seine Polare. Zu jedem Punkt der Ebene, dem Pol, gehört also eine bestimmte Gerade, die Polare und umgekehrt.

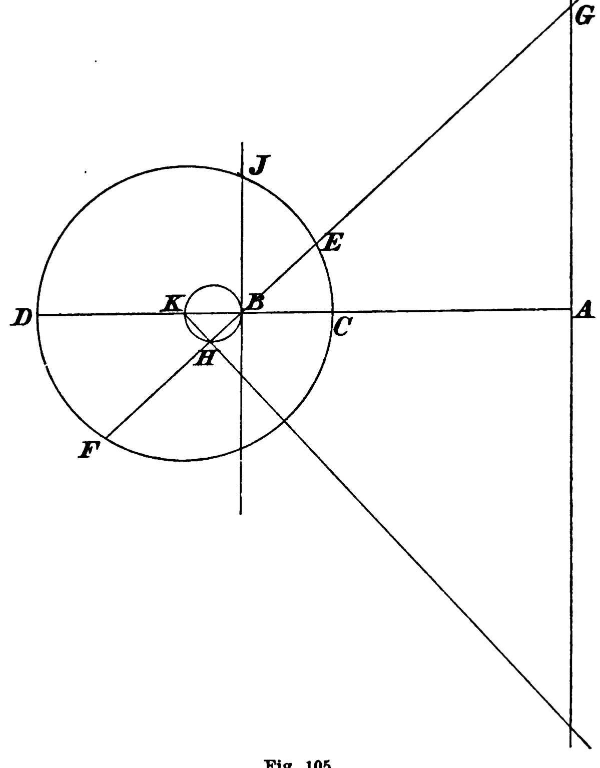


Fig. 105.

Liegt der Pol innerhalb des Kreises, so liegt seine Polare außerhalb; liegt er außerhalb, so schneidet seine Polare den Kreis. Liegt der Pol auf dem Kreise, so ist die Polare Tangente des Kreises und der Pol ihr Berührungspunkt. Ist der Pol unendlich fern, so geht die Polare durch den Mittelpunkt des Kreises; liegt er im Mittelpunkt, so ist die Polare unendlich fern mit allen ihren Punkten, die unendlich ferne Gerade.

Sehr anschaulich stellt diese Verhältnisse eine der Raumgeometrie entspringende Betrachtung dar. Über den Kreis $CEIDF$ (Fig. 105) sei eine Halbkugel gedeckt. Sei P ein Punkt der Halbkugel. Dann ist die Projektion von P auf die Ebene der Zeichnung Pol, der Schnitt der Tangentialebene in P mit der Zeichnungsebene seine Polare. Liegt P senkrecht über K, so wird die Tangentialebene

parallel der Zeichnungsebene und die Polare entflieht ins Unendliche.

Suchen wir nun die geometrischen Eigenschaften von Pol und Polare zu ermitteln.

Beschreiben wir einen Kreis (Fig. 105), dessen Durchmesser KA ist, so ist dieser Kreis das Bild der Polare BI. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Polare entsprechen sich selbst, gehören also dem Kreise $CEID$ an. Ist I ein Schnittpunkt von diesem Kreise mit der Polare, so geht also das Bild der Polare durch diesen Punkt und folglich ist $\sphericalangle AIK = 90^0$; die Gerade AI berührt den Kreis CID.

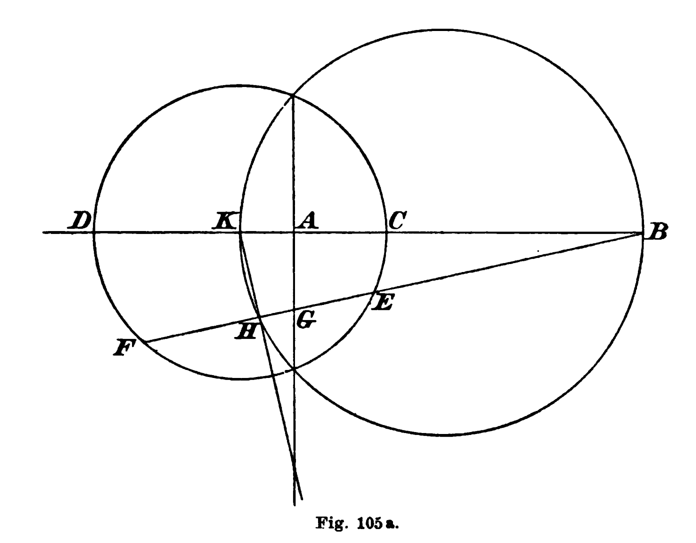


Fig. 105a.

Für einen äußeren Punkt ist die Polare Berührungssehne. Sei Fig. 105 und 105a das Punktepaar A, B und AG die Polare des Poles B gezeichnet, also $KA \cdot KB = KC^2 = m^2$. Sei durch den Pol eine beliebige Gerade gezogen, welche den Kreis um K in E, F, die Polare in G treffen möge. Wir behaupten, daß BG, EF harmonische Punkte sind. Zum Beweise verfährt man am besten rechnerisch. Das Viereck $KHAG$ ist ein Kreisviereck (bei A und H rechte Winkel), also $BK \cdot BA = BH \cdot BG$.

Addiert man (Fig. 105) beiderseits BK^2, aber rechts in der Form $KH^2 + HB^2$ (für 105a muß man $BK^2 - BK \cdot BA$ bilden), so folgt:

$$BK \cdot KA = KH^2 + HB \cdot HG.$$

Nun ist $BK \cdot KA = m^2 = KF^2$; es ist aber $KF^2 - KH^2 = HF^2$. Also auch

$$HF^2 = HB \cdot HG.$$

Dieses Ergebnis können wir so aussprechen: **Zieht man durch den Pol einen willkürlichen Strahl, so ist die Polare der geometrische Ort des dem Pol zugeordneten vierten harmonischen Punktes, wenn die Kreisschnittpunkte das andere Paar sind.**

Der vorstehende rechnerische Beweis faßt beide Fälle Fig. 105 und 105a zusammen. Man hätte auch von der Erklärung ausgehen können: Die Polare ist der geometrische Ort des vierten harmonischen dem Pol zugeordneten harmonischen Punktes, wenn die Kreisschnittpunkte das andere Paar auf einem durch den Pol gehenden Strahl liegender Punkte sind. Es ist dann zu beweisen, daß dieser Ort eine gerade Linie ist. Für einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt gilt diese Erklärung der Polare dem Wortlaut nach nur, soweit reelle Schnittpunkte vorhanden sind. In Wirklichkeit liegt aber noch eine weit größere Schwierigkeit in dem Umstande, daß die Sätze von Pol und Polare nicht nur für den Kreis, sondern allgemein für die Kegelschnitte ausgesprochen werden können. Die eigentliche Quelle dieser Sätze muß also anderswo liegen. Sei die Gleichung des Kegelschnitts

(K) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Wir stellen mit dieser Gleichung einen Punkt ξ, η zusammen, indem wir die neue Gleichung bilden:

(P) $$(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13})x + (a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23})y + a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33} = 0.$$

Sie ist die Gleichung einer geraden Linie und zwar die Gleichung der Tangente, wenn ξ, η ein Punkt des Kegelschnitts (K) ist. Ist (ξ, η) ein beliebiger Punkt, so ist (P) die Gleichung seiner Polare in bezug auf den Kegelschnitt (K). Dieses Verhalten läßt sich nun noch mehr verallgemeinern. Ersetzen wir (K) durch die homogene Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = F,$$

so können wir die Gleichung (P) in die Form setzen:

(P_1) $$x\frac{\partial F}{\partial \xi} + y\frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0,$$

wo die partiellen Ableitungen den Sinn haben, es sollen die drei Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ gebildet und nach vollzogener Differentiation sollen x, y, z durch ξ, η, 1 ersetzt werden. Verstehen wir nun unter $F(x, y)$ irgend eine Funktion n^{ten} Grades, so ist (P_1) eine gerade Linie, welche zur Tangente wird, wenn (ξ, η) ein Punkt der Kurve $F(x, y) = 0$ ist.

In diesem Verhalten liegt der tiefere Grund, weshalb die Polare eine an geometrischen Eigenschaften so ergiebige Linie ist.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir die Haupteigenschaft der Polare beim Kegelschnitt ableiten.

Seien (x, y), (ξ, η) zwei Punkte. Wir verbinden sie durch eine Gerade. Dann hat ein Punkt dieser Geraden die Koordinaten:

$$x_1 = \frac{x + \lambda\xi}{1+\lambda}, \quad y_1 = \frac{y + \lambda\eta}{1+\lambda}.$$

Soll nun dieser Punkt dem Kegelschnitt angehören:

$$K(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so muß diese Gleichung befriedigt sein, wenn wir x_1, y_1 einsetzen. Dies ergibt, wenn wir nach Potenzen von λ ordnen, die Gleichung:

$$K(x, y) + 2\lambda K_1(x, y, \xi, \eta) + \lambda^2 K(\xi, \eta) = 0.$$

Der Koeffizient von 2λ ist, wie die Rechnung ergibt:

$$K_1(x, y, \xi, \eta) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\xi + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\eta$$
$$+ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}.$$

Wenn wir nun (ξ, η) als festen Punkt annehmen, so bietet die Festsetzung $K_1 = 0$ die Gleichung einer **geraden Linie**. Für die Punkte dieser Geraden, der **Polare** des Poles (ξ, η) bezüglich des Kegelschnittes $K(x, y) = 0$ ist also:

(B) $$K(x, y) + \lambda^2 K(\xi, \eta) = 0.$$

In dieser Gleichung ist ξ, η festbestimmt, x, y gehorchen der Gleichung $K_1 = 0$, sind im übrigen willkürlich. Für jedes solches Punktepaar x, y; ξ, η liefert (B) zwei entgegengesetzt gleiche Werte für λ und dadurch die Schnittpunkte der (x, y), (ξ, η) verbindenden Geraden mit dem Kegelschnitt:

$$x_1 = \frac{x + \lambda\xi}{1+\lambda}, \quad y_1 = \frac{y + \lambda\eta}{1+\lambda},$$

$$x_2 = \frac{x - \lambda\xi}{1-\lambda}, \quad y_2 = \frac{y - \lambda\eta}{1-\lambda}.$$

Die vier Punkte (x, y), (x, ξ), (x_1, y_1), (x_2, y_2) sind aber zugeordnete harmonische Punktepaare. Denn es ist:

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - \xi} = \frac{y_1 - y}{y_1 - \eta} = -\lambda, \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - \xi} = \frac{y_2 - y}{y_2 - \eta} = \lambda;$$

also

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - \xi} : \frac{x_2 - x}{x_2 - \eta} = -1, \quad \frac{y_1 - y}{y_1 - \eta} : \frac{y_2 - y}{y_2 - \eta} = -1.$$

Auf die in der analytischen Geometrie von selbst auftretenden entgegengesetzten Vorzeichen bei der harmonischen Verhältnisgleichung

haben wir schon hingewiesen. Die Gleichung $K_1 = 0$ kann man auch schreiben:

$$(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13})x + (a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23})y + a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33} = 0.$$

Sie bleibt also unverändert, wenn man (x, y) mit (ξ, η) vertauscht. Das besagt: Macht man einen beliebigen Punkt der Polare (x, y) zum Pol, so wird dessen Polare durch (ξ, η) gehen. Für den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ wird die Polare des Punktes (ξ, η):

$$x\xi + \eta y = r^2.$$

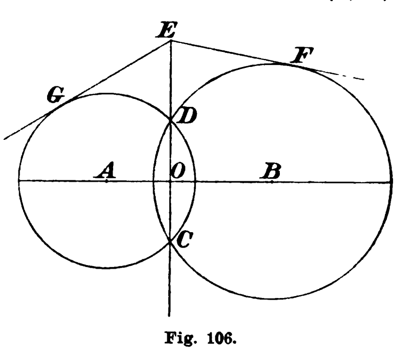


Fig. 106.

Wir wenden uns nunmehr zum Gefüge zweier Kreise. Gehen wir von dem einfachsten Fall aus und nehmen an (Fig. 106), daß die Kreise sich schneiden. Ziehen wir von einem beliebigen Punkte der gemeinsamen Sekante E an beide Kreise die Tangenten, so ist $EG^2 = EF^2$. Die gemeinsame Sekante ist ferner senkrecht zur Zentrale. Endlich ist

$$OB^2 = BD^2 - OD^2,$$

$$OA^2 = AD^2 - OD^2,$$

also, wenn $BD = r$, $AD = \varrho$,

$$OB^2 - OA^2 = r^2 - \varrho^2.$$

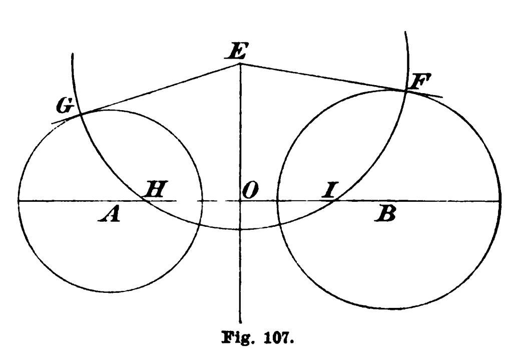


Fig. 107.

Hiermit sind drei Eigenschaften der gemeinsamen Sekante ermittelt. Wir fragen, ob sie bestehen bleiben, wenn der Umstand wegfällt, daß die Kreise sich schneiden. Zu diesem Zweck sei E (Fig. 107) ein Punkt, von welchem an die gegebenen Kreise zwei gleiche Tangenten gehen, EG und EF. Dann ist, wenn $AG = \varrho$, $BF = r$,

$$EG^2 = EA^2 - \varrho^2 = EF^2 = EB^2 - r^2,$$

also

$$EB^2 - EA^2 = r^2 - \varrho^2.$$

Nun sei

$$EO \perp AB.$$

Dann ist $OB^2 - OA^2 = EB^2 - EA^2$. Folglich besitzt die Linie OE (Fig. 107) die Eigenschaften der gemeinsamen Sekante (Fig. 106).

Umgekehrt gilt auch: ist $OB^2 - AO^2 = -\varrho^2 + r^2$ und $OE \perp AB$, so ist OE Ort der Punkte gleicher Potenz für die beiden Kreise um A und B. Denn aus der Annahme folgt durch Addition von OE^2 alsbald

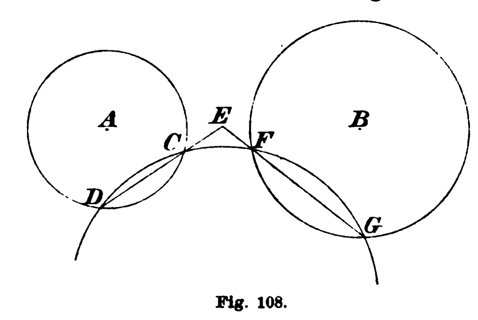


Fig. 108.

$$EB^2 - EA^2 = -\varrho^2 + r^2,$$

also

$$EB^2 - r^2 = EF^2$$
$$= EA^2 - \varrho^2 = EG^2.$$

Die Linie EO heißt Chordale der Kreise A und B. Sie hat also folgende Eigenschaften:

A) Sie steht senkrecht zur Zentrale.

B) Sie teilt die Zentrale so, daß die Differenz der Quadrate der Teile gleich der Differenz der Quadrate der entsprechenden Kreisradien ist.

C) Sie ist der geometrische Ort der Punkte, welche bezüglich der Kreise gleiche Potenz haben.

Diese drei Eigenschaften bedingen sich gegenseitig und führen zu drei Sätzen:

Wenn ***A***) und ***B***) ist, so ist auch ***C***);
" ***A***) " ***C***) " " " " ***B***);
" ***B***) " ***C***) " " " " ***A***).

Die Beweise führt man durch Rechnung. Der dritte Satz (und ähnlich der zweite) würde den Wortlaut haben: Verbindet man einen Punkt, welcher für zwei Kreise gleiche Potenz hat, mit dem Punkte der Zentrale O, für welchen $OB^2 - OA^2 = r^2 - \varrho^2$ ist, so steht diese Linie auf der Zentrale senkrecht.

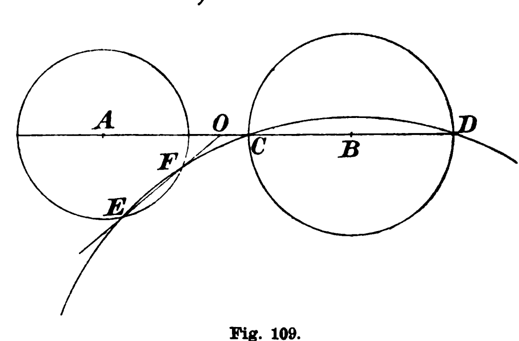


Fig. 109.

Die Eigenschaft ***C***) schließt die Behauptung in sich, daß außerhalb der Chordale kein Punkt bezüglich der beiden Kreise gleiche Potenz hat. Es ist nützlich, dies durch einen indirekten Beweis ausdrücklich festzustellen. Dann erhält man den Satz, daß die Chordalen von drei Kreisen durch einen Punkt gehen und Mittel zur Zeichnung der Chordale.

1. Man beschreibt einen Kreis, welcher die gegebenen Kreise schneidet und zieht die gemeinsamen Sekanten. Ihr Schnittpunkt E ist ein Punkt der Chordale. Denn $EC \cdot ED = EF \cdot EG$.

2. Man zieht die Zentrale und legt durch die Endpunkte C, D des Durchmessers einen Kreis, welcher den andern in E und F schneidet. EF trifft die Zentrale in O, dem Fußpunkt der Chordale.

3. Man halbiert die gemeinsamen Tangenten.

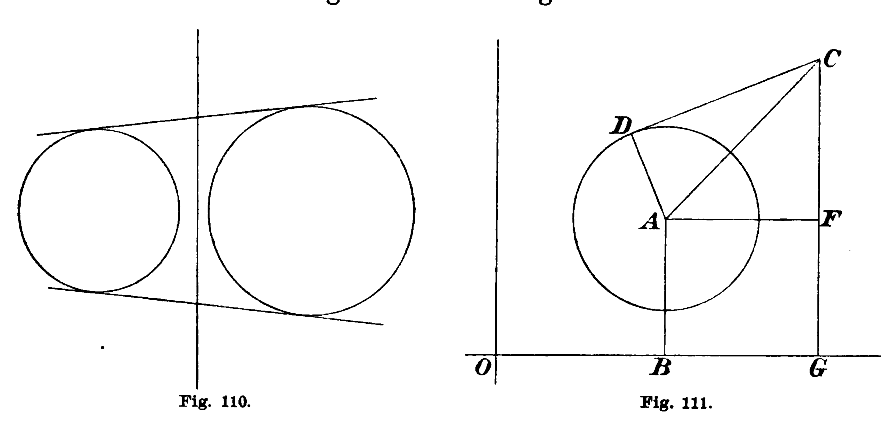


Fig. 110. Fig. 111.

Die Potenz ist, wenn die Kreise sich nicht schneiden, in allen Punkten der Chordale positiv. Schneiden sich die Kreise, so ist die Potenz auf den äußeren Punkten der gemeinsamen Sekante positiv, in den Schnittpunkten Null, auf den Punkten der gemeinsamen Sehne negativ.

Analytisch stellt die Gleichung des Kreises sich in der Form dar:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0.$$

Ist $C = (x, y)$ nicht ein Punkt des Kreises, so haben wir (Fig. 111)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = P,$$

wo P von Null verschieden ist. Dies ist S. 220 näher untersucht worden. Es ist P die Potenz des Punktes $C = (x, y)$ in bezug auf den gegebenen Kreis, $A = (a, b)$, $AD = r$, $P = CD^2$. Für einen Punkt im Innern des Kreises hat P negativen Wert und dieselbe Bedeutung. Seien nun zwei Kreise gegeben:

$$K = x^2 + y^2 + px + qy + r = 0,$$
$$K' = x^2 + y^2 + p'x + q'y + r' = 0,$$

so ist der Ort der Punkte gleicher Potenz die gerade Linie

$$px + qy + r = p'x + q'y + r', \quad \text{oder} \quad K = K'.$$

Für die gemeinsamen Punkte beider Kreise ist $K = 0$ und $K' = 0$,

also auch $K - K' = 0$, d. h. die Chordale geht durch die gemeinsamen Punkte der Kreise, auch wenn diese nicht reell sind.

Chordale, Pol und Polare drängen durch ihre Eigenschaften zur Einführung der sogenannten uneigentlichen Elemente, wie dies im Vorhergehenden geschehen ist. In der analytischen Geometrie stehen Punkten mit reellen Koordinaten solche mit imaginären als völlig gleichberechtigte Lösungen von Gleichungen gegenüber. Deshalb zeigt die Chordale für die Rechnung wesentlich die gleichen Eigenschaften, mögen sich die Kreise schneiden oder nicht. In der auf Anschauung und Zeichnung aufgebauten Geometrie verliert die Eigenschaft der Kreise, sich in imaginären Punkten zu schneiden, ihren positiven Charakter und verblaßt zu dem inhaltsleeren kontradiktorischen Urteil: „Die Kreise schneiden sich nicht". Wie dieser Schwierigkeit zu begegnen und die Betrachtung imaginärer Elemente in der Geometrie zu gestalten ist, bleibt teils Methoden der projektiven Geometrie vorbehalten, teils darf auf die vorhergehenden Entwicklungen verwiesen werden.

Anders ist das Verhalten der sogenannten unendlich fernen Elemente. Indem etwa der Pol P sich auf einer durch den Kreismittelpunkt gehenden Geraden a ins Unendliche entfernt, rückt die Polare p, senkrecht zu a stehend, dem Kreismittelpunkt immer näher und die von P an den Kreis gelegten Tangenten gehen immer mehr in ein paralleles Tangentenpaar über. Rückt umgekehrt P dem Mittelpunkt nahe, so entflieht $p \perp a$ ins Unendliche. Beiden Vorgängen vermag die Phantasie mit Leichtigkeit zu folgen, und deshalb kann das Verhalten der unendlich fernen Punkte und der einen unendlich fernen Geraden für die Herleitung geometrischer Wahrheiten fruchtbar werden. Indes ist Vorsicht geboten. Es muß festgehalten werden, daß die Einführung der uneigentlichen Elemente nur eine bequeme Redeweise ist (vgl. S. 224, oben). Zwei parallele Linien schneiden sich in der Euklidischen Geometrie in einem unendlich fernen Punkt. Das ist kein Widerspruch gegen den Satz derselben Geometrie, daß zwei Parallele überall gleichen Abstand haben. Denn ersterer Ausspruch ist nur eine bequemere und kürzere Fassung der Aussage: Dreht sich die Gerade a um den Punkt P und schneidet a die Gerade b in B, so nähert sich a immer mehr einer gewissen Grenzlage; sie kann sich dieser Grenzlage beliebig nähern, wenn B hinreichend weit auf b fortrückt. Weil jede Lage von a einem bestimmten Punkte B entspricht, hat b nur einen unendlich fernen Punkt. Zu demselben Ergebnis führt die obige Betrachtung von Pol und Polare; und in der Ebene gibt es nur eine unendlich ferne Gerade, nämlich die dem Kreismittelpunkt als Pol zugeordnete Polare. Vgl. S. 239, unten.

§ 13. Merkwürdige Punkte des Dreiecks.

1. Der Mittelpunkt des Umkreises. Man errichtet zwei Mittelsenkrechte und zeigt, daß die vom Schnittpunkt zur dritten Seite gefällte Senkrechte die Mitte der Seite trifft oder daß die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit der Mitte der dritten Seite zu dieser senkrecht steht. Die Entfernungen des Schnittpunkts von den drei Ecken sind einander gleich. Nennt man (Fig. 112) den Radius des Umkreises r, den Mittelpunkt O, so ist

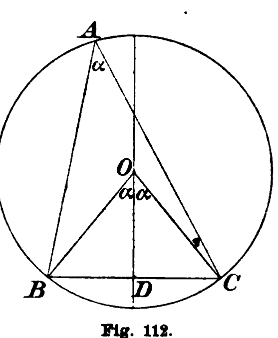


Fig. 112.

$$\sphericalangle AOB = 2\gamma, \quad \sphericalangle BAO = 90 - \gamma,$$
$$\sphericalangle OAC = 90 - \beta.$$

Ferner ist

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}, \quad r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Da $I = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$, so ist $r = \frac{abc}{4I}$.

Für den Abstand OD findet man $d_a = r\cos\alpha$, also

$$d_a = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{8I},$$

also

(1) $$4d_a^2 = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

Sind die drei Abstände d_a, d_b, d_c gegeben, so kann das Dreieck mit Hülfe einer Gleichung dritten Grades bestimmt werden. Die Aufstellung dieser Gleichung vermitteln die Beziehungen:

$$a^2 = 4r^2 - 4d_a^2, \quad b^2 = 4r^2 - 4d_b^2, \quad c^2 = 4r^2 - 4d_c^2,$$

welche in (1) eingesetzt eine Gleichung für r liefern. Sie lautet

$$r^6 - 2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)r^4 + (d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)^2 r^2 - 4d_a^2 d_b^2 d_c^2 = 0.$$

Setzt man $r^2 - d_a^2 - d_b^2 - d_c^2 = z$, so wird

$$z^3 + (d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)z^2 = 4d_a^2 d_b^2 d_c^2.$$

Für das rechtwinklige Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ ist

$$d_a = \frac{b}{2}, \quad d_b = \frac{a}{2}, \quad d_c = 0, \quad r = \frac{c}{2}.$$

Für die Trigonometrie ist nicht ohne Bedeutung die sogenannte r-Methode. Sie besteht darin, alle gegebenen Stücke durch r und die Winkel auszudrücken. Die drei gegebenen Bestimmungen führen dann zu drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

2. **Der Mittelpunkt des Inkreises.** Man halbiert zwei Innenwinkel und weist nach, daß die vom Schnittpunkt zur dritten Ecke gezogene Linie den dritten Innenwinkel halbiert. Die vom Schnittpunkt gefällten Senkrechten sind einander gleich. Man bezeichnet den Radius des Inkreises mit ϱ, die halbe Seitensumme des Dreiecks möge σ heißen. Dann ergeben sich die Bezeichnungen $AF = AE = x$ usw. aus kongruenten Dreiecken. Daher $2(x + y + z) = 2\sigma$, und da $y + z = a$, $x = \sigma - a$. Ebenso folgt $y = \sigma - b$, $z = \sigma - c$. Die Summe der Inhalte AOB, AOC, BOC führt auf $(a + b + c)\varrho = 2I$ oder $\varrho\sigma = I$. Hieraus ergibt sich die Formelgruppe

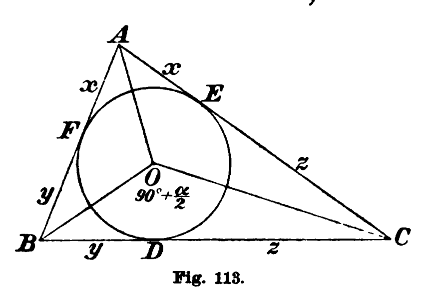


Fig. 113.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - c};$$

$$I = \varrho\sigma.$$

Sie ist für die Berechnung der Winkel aus den gegebenen Seiten von allen aufstellbaren die beste, wenn nicht a, b, c kleine Zahlen sind, deren Quadrate und Produkte man durch Kopfrechnung bilden kann. Aus $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{AO}$ findet man

$$AO = \frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sigma - a}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

ferner ist $AO^2 = \varrho^2 + (\sigma - a)^2$. Nennt man die drei Abstände der Ecken A, B, C von O der Reihe nach D_a, D_b, D_c, so hat man

$$D_a^2 - D_b^2 = (\sigma - a)^2 - (\sigma - b)^2 = (b - a)(2\sigma - a - b) = c(b - a).$$

$$D_a^2 = \frac{bc(\sigma - a)}{\sigma}, \quad D_b^2 = \frac{ac(\sigma - b)}{\sigma}, \quad D_c^2 = \frac{ab(\sigma - c)}{\sigma}.$$

Nimmt man ϱ als Hauptunbekannte, so folgt aus den Gleichungen

$$c = \sqrt{D_a^2 - \varrho^2} + \sqrt{D_b^2 - \varrho^2}$$

und den entsprechenden für a und b

$$0 = 1 - \left(\frac{\varrho^2}{D_a^2} + \frac{\varrho^2}{D_b^2} + \frac{\varrho^2}{D_c^2}\right) - 2\frac{\varrho^3}{D_a D_b D_c}.$$

Der Mittelpunkt des Inkreises besitzt eine merkwürdige von Euler entdeckte Eigenschaft in seinem Abstande vom Mittelpunkt des Umkreises. Der Winkelhalbierer geht durch den Mittelpunkt des Inkreises und den Mittelpunkt D des Bogens BC. Nun sei

(Fig. 114) $BD = DO$. Die Methode der Winkelberechnung auf das Dreieck BDO angewandt zeigt, daß OB Winkelhalbierer ist, also O Mittelpunkt des Inkreises. Die Potenz von O bezüglich des Umkreises ist $(r+d)(r-d)$, wenn d der Abstand des Punktes O vom Mittelpunkt des Umkreises ist. Sie ist aber auch gleich $OD \cdot OA = BD \cdot OA$. Nun ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BD}{2r} \text{ (Dreieck } EBD)$$

und

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{AO} \text{ (Dreieck } AOF).$$

Also $BD \cdot AO = 2r\varrho$. Die Beziehung lautet also:

$$r^2 - d^2 = 2r\varrho.$$

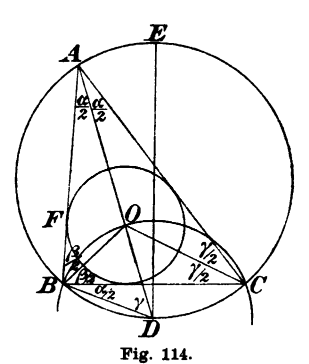


Fig. 114.

Folglich ist d gegeben, wenn r und ϱ bekannt sind. Dagegen ist die Beziehung frei von Angaben über die sonstigen Bestimmungsstücke des Dreiecks. Sie führt also zu einer schönen Lösung der Aufgabe a, r, ϱ. Die hier behandelte Aufgabe gehört zu dem Schließungsproblem: Gegeben zwei Kreise, von denen der eine den andern umschließt. Von einem Punkte des äußeren wird an den inneren eine Tangente gezogen, vom Schnittpunkte dieser Tangente mit dem größeren eine zweite Tangente usw., so daß die Sehnen des größeren zugleich Tangenten des kleineren Kreises sind. Man sucht die Bedingung, daß ein geschlossenes Vieleck von n Ecken entsteht. Die Lösung ist in mehrfacher Beziehung merkwürdig. Sie ist durch eine Gleichung zwischen d, r, ϱ gegeben; ferner ist die Lösung unabhängig vom Ausgangspunkte der Tangentenziehung und somit schließt sich das Vieleck immer, wenn es sich für einen beliebig gewählten Ausgangspunkt schließt. Das Problem ist von Steiner und vor ihm von Fuß bearbeitet und von Poncelet auf Kegelschnitte ausgedehnt worden. Die endliche Lösung gab Jacobi mit Hülfe der elliptischen Funktionen. Für das Viereck ist $(r^2 - d^2)^2 = 2\varrho^2(r^2 + d^2)$.

3. Die Mittelpunkte der Ankreise. Man halbiert zwei Außenwinkel und den dritten Innenwinkel. Nennt man den Radius des die Seite a berührenden Ankreises ϱ_a, so hat man die Formelgruppe:

$$\varrho_a \sigma = I; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{\sigma}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sigma - c}{\varrho_a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma - b}{\varrho_a}.$$

Aus dieser Formelgruppe kann man die einfachste Ableitung der Heronischen Inhaltsbestimmung herstellen.

Da (Fig. 115) $BG = BK$, $CG = CH$, so ist

$$KB + BA + HC + CA = 2\sigma = 2AK,$$

also $AK = \sigma$, $BK = \sigma - c$. Aus den Dreiecken BOD und KBO_1 folgt nun

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - b} = \frac{\sigma - c}{\varrho_a}, \quad \text{also} \quad \varrho\varrho_a = (\sigma - b)(\sigma - c).$$

Anderseits ist $I = O_1BA + O_1AC - O_1BC$, also $I = \varrho_a(\sigma - a)$, und mit Hülfe von $\varrho\sigma = I$ wird

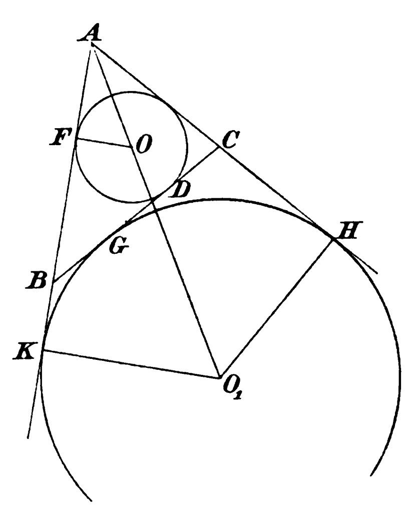
$$I^2 = \varrho\varrho_a\sigma(\sigma - a), \quad \text{folglich} \quad I^2 = \sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c).$$

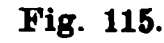
Durch diese Formelgruppen werden die Bestimmungen ϱ, ϱ_a zu ergiebigen Quellen für die Aufgabenstellung. An der Figur 115 bemerken wir noch

$$GD = (\sigma - b) - (\sigma - c) = c - b;$$
$$KF = (\sigma - b) + (\sigma - c) = a.$$

Daher

$$OO_1^2 = a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2.$$




Fig. 115.

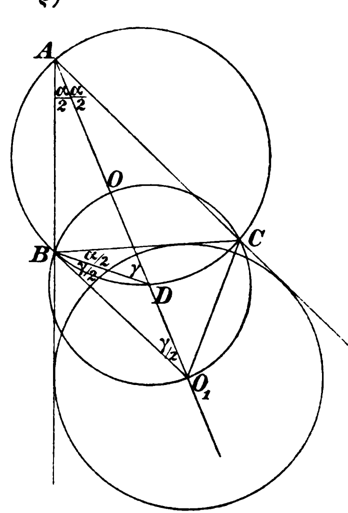


Fig. 116.

Ebenso lehrt diese Konstruktion noch:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a - \varrho}{a}.$$

Wir bemerken ferner:

$$O_1A^2 = \sigma^2 + \varrho_a^2, \quad O_1B^2 = (\sigma - c)^2 + \varrho_a^2, \quad O_1C^2 = (\sigma - b)^2 + \varrho_a^2.$$

Hieraus kann wieder die Endgleichung abgeleitet werden, wenn zur Bestimmung des Dreiecks die Abstände des Mittelpunkts eines Ankreises von den Ecken gegeben sind.

Die Potenz des Punktes O_1 bezüglich des Umkreises ist, wenn d wieder den Abstand des Mittelpunkts von O_1 bedeutet, $d^2 - r^2$.

Die Winkelberechnung in Fig. 116 ergibt für $DO_1 = DB = DC$, daß BO_1 den Außenwinkel bei B halbiert. Also ist auch $d^2 - r^2 = O_1A \cdot O_1D = O_1A \cdot DC$. Nun ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{O_1A} = \frac{DC}{2r}, \quad \text{also} \quad d^2 - r^2 = 2r\varrho_a.$$

Aus den Gleichungen

$$\varrho\varrho_a = (\sigma - b)(\sigma - c), \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_b}{\sigma} = \frac{\sigma - a}{\varrho_c}$$

folgt

$$I^2 = \varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c.$$

Aus

$$\sigma = \frac{I}{\varrho}, \quad \sigma - a = \frac{I}{\varrho_a} \quad \text{usw.}$$

folgt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c},$$

indem

$$\sigma = (\sigma - a) + (\sigma - b) + (\sigma - c)$$

ist. 3ϱ ist also das harmonische Mittel von $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$.

Bei dieser Gelegenheit seien die heronischen Dreiecke erwähnt. Es sind solche mit rationalen Seiten, deren Inhalt rational ist. Für sie sind $r, \varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ ebenfalls rational. Um sie zu erhalten, legt man zwei pythagoreische Dreiecke aneinander, so daß eine Kathete in beiden übereinstimmt und die beiden andern Katheten eine gerade Linie bilden. Pythagoreische Dreiecke entspringen aus den Annahmen

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn.$$

Will man gemeinsame Faktoren vermeiden, so nimmt man m, n relativ prim und nicht zugleich beide ungerade, also m gerade, n ungerade oder umgekehrt. Man kann jedes pythagoreische Dreieck mit jedem andern zu einem heronischen vereinigen. Sei das zweite

$$a_1 = m_1^2 + n_1^2, \quad b_1 = m_1^2 - n_1^2, \quad c_1 = 2m_1n_1.$$

Dann sind auch ab_1, bb_1, cb_1 und a_1b, bb_1, bc_1 solche und zwar mit gleicher Kathete bb_1. Folglich ist ab_1, a_1b, $cb_1 + bc_1$ ein heronisches mit dem Inhalt $\frac{1}{2}bb_1(cb_1 + bc_1)$. Pythagoreische Dreiecke sind

3, 4, 5; 13, 5, 12; 17, 15, 8;

heronische

13, 14, 15; 13, 21, 20; 25, 39, 56; 17, 21, 10 usw.

4. Die Mittellinie und der Schwerpunkt. Es ist zunächst der Satz zu beweisen, daß je zwei Mittellinien sich derartig schneiden, daß das der Ecke zugewandte Stück jeder Mittellinie doppelt so groß ist als das andere. Dieser Satz folgt leicht durch ähnliche Dreiecke.

Durch diesen Satz ist der Schnittpunkt von zwei Mittellinien eindeutig auf jeder Mittellinie festgelegt, und darum geht auch die dritte Mittellinie durch diesen Punkt. Man gibt aus unterrichtlichen Gründen diesem letzten Gedanken eine indirekte Form, und das ist nur zu billigen.

Die Länge der Mittellinie abzuleiten, gelingt mit Hülfe des Pythagoreischen Satzes leicht. Hier wollen wir ein allgemeines Verfahren kennen lernen. Auf einer Geraden (Fig. 117) seien drei Punkte A, B, C gegeben und mit einem außerhalb der Geraden liegenden Punkte D verbunden. $AB = c$, $BC = a$, $DA = f$, $DB = g$, $DC = h$. Welche Beziehung besteht zwischen den Größen a, c, f, g, h?

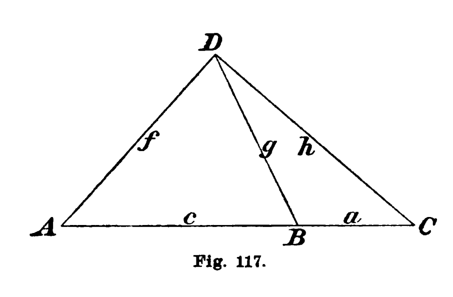


Fig. 117.

Die Antwort ergibt der Ausdruck für cos A. Es ist

$$\frac{f^2 + c^2 - g^2}{c} = \frac{f^2 + (a + c)^2 - h^2}{a + c}.$$

Nach Entwicklung folgt:

$$f^2 a - g^2(a + c) + h^2 c - ac(a + c) = 0,$$

oder

$$f^2 a - g^2 b + h^2 c - abc = 0, \quad \text{wenn} \quad b = a + c.$$

Diese merkwürdige Beziehung liefert die Möglichkeit, fast alle in der Dreiecksgeometrie vorkommenden Strecken zu berechnen. Für die Mittellinien, welche wir mit m_a, m_b, m_c bezeichnen wollen, liefert sie die Gleichung:

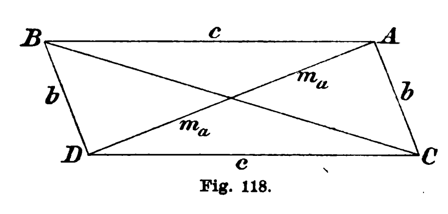


Fig. 118.

(1) $$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2.$$

Sie wird am besten am Parallelogramm in Worten ausgedrückt und liefert den umkehrbaren Satz: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen. Die Umkehrung bewirkt man durch Lösung der Aufgabe: Gegeben ein Viereck. Man bestimme den gegenseitigen Abstand der Mitten seiner Diagonalen. Wir haben auf Fig. 119 dreimal den Mittelliniensatz anzuwenden und finden:

$$4AE^2 = 2f^2 + 2c^2 - g^2; \quad 4CE^2 = 2a^2 + 2h^2 - g^2;$$
$$4EF^2 = 2AE^2 + 2CE^2 - b^2.$$

Daraus folgt:

$$4EF^2 = a^2 + h^2 + f^2 + c^2 - b^2 - g^2,$$

also

$$EF = 0, \quad \text{wenn} \quad a^2 + f^2 + c^2 + h^2 = b^2 + g^2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Aus (1) folgen durch zyklische Vertauschung zwei ähnlich gebaute Gleichungen und durch Addition

$$(2) \qquad 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bestimmt man aus den drei Gleichungen (1) die Seiten a, b, c als Unbekannte, so erhält man die Lösung der Aufgabe aus den drei Mittellinien das Dreieck zu zeichnen. Die Form der Lösung läßt erkennen, daß man aus den drei Mittellinien als Seiten ein Dreieck zeichnen muß, dessen Herstellung die Lösung gibt. Das gleiche Ergebnis zeigt eine einfache geometrische Überlegung. Man braucht nur das aus Schwerpunkt und zwei Dreiecksecken gebildete Dreieck zu einem Parallelogramm zu ergänzen.

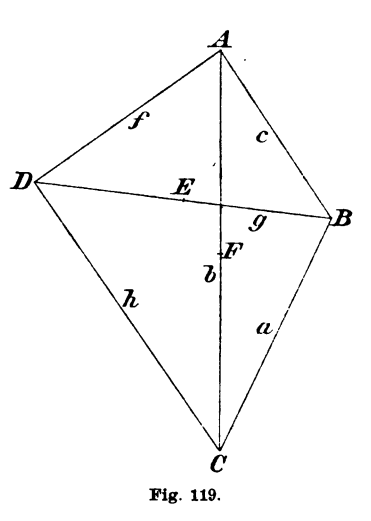


Fig. 119.

Die Bewegung der dritten Ecke A des Dreiecks, wenn die beiden andern B, C fest bleiben, zwingt den Schwerpunkt sich auf einer der Kurve des Punktes A ähnlichen Kurve zu bewegen. Ähnlichkeitspunkt ist die Mitte der Strecke BC, das Verhältnis der Abbildung ist $1:3$.

Der Schnittpunkt der Mittellinien ist nur für das Dreieck erklärt. Eine Begriffserweiterung erlangen wir durch die Schwerpunktseigenschaft und durch eine Minimalbeziehung. Der Flächenschwerpunkt des Dreiecks ist zugleich Schwerpunkt der mit gleichen Massen belegten drei Eckpunkte. Für das Viereck sind diese Punkte verschieden. Der Flächenschwerpunkt liegt beim Viereck auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in welche eine Diagonale das Viereck zerlegt. Diese Verbindungslinie muß nach dem Hebelgesetze geteilt werden, um den Schwerpunkt des Vierecks zu liefern. Diese Teilung wird durch die Diagonale selbst vollzogen, doch bedürfen die Stücke der Umlegung. Sind die vier Eckpunkte des Vierecks jeder mit gleicher Masse belegt, so kreuzen die Verbindungslinien der Mitten von zwei Gegenseiten und der Mitten der Diagonalen sich in dem Schwerpunkte der vier gleichen

Massen. In diesem Falle zeigt sich die größte Analogie zum Schwerpunkt des Dreiecks.

Folgende Aufgabe ist ebenfalls für den Dreiecksschwerpunkt wichtig. Seien n Punkte gegeben $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n$. Welchen Ort beschreibt ein Punkt x, y, welcher sich so bewegt, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen von den n Punkten eine vorgeschriebene Größe haben soll? Die Lösung enthält die Gleichung:

$$(3) \qquad \begin{aligned}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+\cdots \\ +(x-x_n)^2+(y-y_n)^2=m^2.\end{aligned}$$

Die Kurve ist ein Kreis. Die Koordinaten des Mittelpunkts sind:

$$(4) \qquad \xi=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \quad \eta=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n};$$

also die Koordinaten des Schwerpunkts der mit gleichen Massen belegten n Punkte.

Die Gleichungen (4) schreiben wir kurz

$$(4a) \qquad \sum_1^n{}_k(\xi-x_k)=0, \quad \sum_1^n{}_k(\eta-y_k)=0.$$

Für beliebige Werte x, y ist

$$\begin{aligned}(x-x_k)^2+(y-y_k)^2&=(x-\xi+\xi-x_k)^2+(y-\eta+\eta-y_k)^2\\ &=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+2(x-\xi)(\xi-x_k)+2(y-\eta)(\eta-y_k)\\ &\quad+(\xi-x_k)^2+(\eta-y_k)^2.\end{aligned}$$

Nimmt man nun die Summen für die Werte $k=1, 2, \dots, n$, so folgt mit Rücksicht auf (4a):

$$\begin{aligned}n(x-\xi)^2+n(y-\eta)^2+\sum_1^n{}_k[(\xi-x_k)^2+(\eta-y_k)^2]\\ =\sum_1^n{}_k[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2].\end{aligned}$$

Der Summenausdruck links ist ein fester Wert. Die Summe rechts wird also am kleinsten, wenn der verschiebbare Teil links am kleinsten, also Null ist, d. h. für $x=\xi$, $y=\eta$. Daher der Satz:

Sind n Punkte gegeben und soll der Punkt gefunden werden, für welchen die Summe der Quadrate der Abstände von den n Punkten ein Minimum wird, so ist dies der Schwerpunkt der mit gleichen Massen belegten n Punkte.

Für das Dreieck wollen wir diesen Satz noch besonders beweisen. Ein Punkt P (Fig. 120) habe von den Eckpunkten A, B, C die Entfernungen x, y, z. Der Schwerpunkt sei O, $PO=s$. Dann

ist, wie aus dem Satze S. 252 in Anwendung auf das Dreieck PAD hervorgeht,

$$9PO^2 = 3x^2 - 2m_a^2 + 6PD^2.$$

Es ist aber

$$4PD^2 + a^2 = 2y^2 + 2z^2, \quad 4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

folglich

$$9PO^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Mithin wird $x^2 + y^2 + z^2$ am kleinsten, wenn $PO = 0$ ist.

Die sich hier ergebenden Aufgaben sind einer großen Verallgemeinerung fähig. Seien zwei Punkte x_1, y_1; x_2, y_2 gegeben. Fragen wir nach dem geometrischen Orte des Punktes x, y, welcher die Bedingung erfüllen soll:

$$m(x - x_1)^2 + m(y - y_1)^2 + n(x - x_2)^2 + n(y - y_2)^2 = a^2,$$

so wird ein Kreis gefunden, welche Werte auch m und n haben. Für $m + n = 0$ entartet der Kreis.

Diese Aufgabengruppe können wir leicht mit den einfachsten Mitteln schulmäßig gestalten. Gegeben zwei Punkte B, C. Welche Kurve beschreibt A, wenn $2AB^2 + 3AC^2 = m^2$ sein soll?

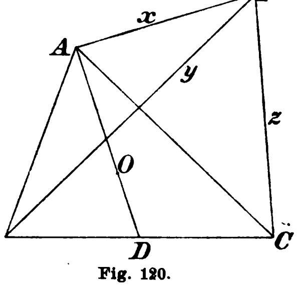


Fig. 120.

Die Kurve liegt zunächst symmetrisch zur Geraden BC. Ist sie also ein Kreis, so muß ihr Mittelpunkt auf BC liegen. Sei O dieser Mittelpunkt, D ein Punkt dieses Kreises auf BC und $DB = x$, also $DC = a - x$, dann wird $2x^2 + 3(a - x)^2 = m^2$. Die Gleichung liefert zwei Werte, welche die Endpunkte des Durchmessers bestimmen. Es ist

$$x^2 - \frac{6}{5}ax = \frac{m^2 - 3a^2}{5}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien x_1 und x_2. Dann ist

$$x_1 + x_2 = \frac{6a}{5}, \quad x_1 x_2 = \frac{3a^2 - m^2}{5}.$$

Die Entfernung des Mittelpunkts O des gesuchten Kreises von B ist $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3a}{5}$, von C also $\frac{2a}{5}$. Sein Radius ist $\frac{x_1 - x_2}{2}$, also

$$\sqrt{\frac{9a^2}{25} - \frac{3a^2 - m^2}{5}} = \frac{\sqrt{5m^2 - 6a^2}}{5}.$$

Diese Ableitungen sind noch durch den Nachweis zu vervollständigen, daß die gesuchte Kurve wirklich ein Kreis ist. Dieser Beweis ge-

lingt höchst einfach durch Rechnung. Wir ziehen (Fig. 121) im Dreieck ABC die Linie AO. Dann folgt aus

$$BO = \frac{3a}{5}, \quad OC = \frac{2a}{5}, \quad AO^2 = \frac{5m^2 - 6a^2}{25}$$

unter Anwendung der S. 252 gegebenen Rechnung $2c^2 + 3b^2 = m^2$. Ähnlich verfährt man in allen ähnlichen Fällen. Es mag darauf hingewiesen werden, daß diese Aufgabenklasse zu den verschiedensten Teilen der Schulgeometrie und Algebra Beziehungen hat und ihre Lösung leicht ist.

5. Der Höhenpunkt. Die drei Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Höhenpunkt. Wir ziehen durch die drei Ecken Parallelen zu den Gegenseiten. Dann entsteht ein dem gegebenen umbeschriebenes Dreieck, in welchem die Höhen des ursprünglichen Dreiecks Mittelsenkrechte sind und deshalb einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen. Für die Höhen sind noch folgende Beziehungen von Wichtigkeit. Das Viereck $FODB$, Fig. 122, ist ein Kreisviereck, also $\sphericalangle FDA = FBO = 90 - \alpha$.

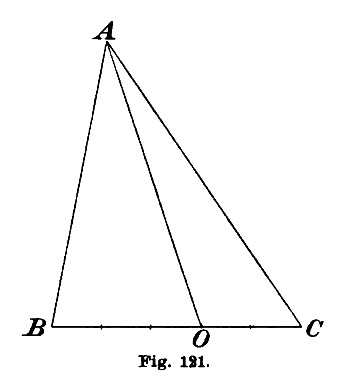


Fig. 121.

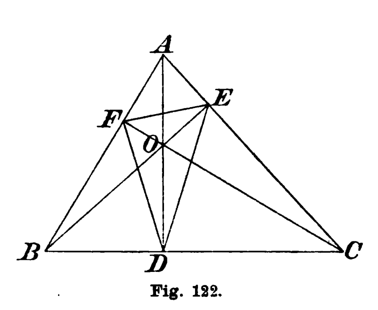


Fig. 122.

Ebenso ist $EODC$ ein Kreisviereck und darum $\sphericalangle EDA = OCE = 90 - \alpha$. Der Höhenpunkt O ist mithin Mittelpunkt des Inkreises für das Dreieck FDE. Hieraus ergibt sich die Lösung der Aufgabe, aus den drei Fußpunkten der Höhen ein Dreieck zu zeichnen. Halbiert man den Dreieckswinkel BAC, so ist der Winkel zwischen Höhe und Winkelhalbierer

$$\frac{\alpha}{2} - (90 - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^0, \quad \text{also} \quad \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Sind die drei Höhen eines Dreiecks gegeben, so folgt aus $ah_a = bh_b = ch_c$, daß man die Verhältnisse der Seiten kennt. Hieraus folgt sofort eine geometrische Lösung. Eine rechnerische ergibt der Kosinussatz. Es ist

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{h_a^2 h_b^2 + h_a^2 h_c^2 - h_b^2 h_c^2}{2 h_a^2 h_b h_c},$$

$$2\cos\alpha = \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} - \frac{h_b h_c}{h_a^2}.$$

Die Zeichnung gelingt durch $2h_c \cos\alpha = h_b + \frac{h_c^2}{h_b} - \frac{h_b h_c^2}{h_a^2}$ oder durch $2h_a \cos\alpha$.

Die Gleichungen $ah_a = bh_b = ch_c$ bewirken, daß auch zwischen Summen und Differenzen der Seiten und Höhen Beziehungen auftreten, welche zu Aufgaben führen. Es ist $\frac{a+b}{h_a+h_b} = \frac{b}{h_a}$. Andererseits liefert $\frac{h_a}{b}$ den Winkel γ. So ist $a+b$, h_a+h_b, γ eine Dreiheit von Größen wie a, r, α oder a, h_a, I. Zwei der Größen bestimmen die dritte.

Die vier bis jetzt besprochenen Punkte gehören zu den in jedem Geometrieunterricht unentbehrlichen Stücken. An die genannten vier (Inkreis, Umkreis, Schwerpunkt, Höhenpunkt) schließt sich eine nahezu unübersehbare Menge anderer merkwürdiger Punkte. Es ist nicht zu verwundern, daß der Geschmack und die wissenschaftliche Neigung sehr verschieden sind und deshalb herrscht keine Übereinstimmung bezüglich der Auswahl des fünften usw. merkwürdigen Punktes. Wir möchten an der Ansicht festhalten (vgl. des Verf. 100 Aufgaben), daß von allen anderen derjenige der merkwürdigste ist, welcher die Seiten des Dreiecks unter gleichen Sehwinkeln 120^0 zeigt. Außer dieser Eigenschaft besitzt er folgende:

2. Setzt man den Dreiecksseiten nach außen hin gleichseitige Dreiecke auf und verbindet ihre Spitzen mit den Gegenecken des Dreiecks, so laufen diese Linien durch den Punkt.

3. Diese Verbindungslinien haben dieselbe Größe.

4. Die Umkreise der drei aufgesetzten Dreiecke schneiden sich in dem Punkte.

5. Die Summe der Entfernungen von den Eckpunkten des Dreiecks ist ein Minimum, kleiner als für jeden andern Punkt.

Alle diese Eigenschaften sind höchst einfach abzuleiten. Insbesondere ist zweckmäßig, die Methode der Drehung um einen der Dreieckseckpunkte anzuwenden.

§ 14. Geometrische Aufgaben.

Die geometrischen Sätze sprechen Beziehungen unter den geometrischen Gebilden aus. Zur Aufstellung dieser Aussprüche gelangt man, wenn man sich mit der Frage beschäftigt, inwiefern einige dieser Gebilde andere bestimmen. So ist das Dreieck bestimmt durch seine

drei Seiten, ein Kreis durch seinen Radius der Größe nach, durch Mittelpunkt und Radius der Größe und Lage nach. Jede Linie, jeder Winkel am Dreieck ist nun durch eine Zeichnung bestimmt, die man an dem fertigen Dreieck vornehmen kann und deshalb auch durch eine Gleichung ersetzbar, welche als Funktion der drei Dreiecksseiten auftritt. Wenn man drei solche Ausdrücke verbindet, so hat man ein Gefüge von drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Dies läßt sich immer auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückführen, wenn die drei gegebenen Gleichungen unabhängig voneinander sind.

Sind also drei Bestimmungen gegeben, welche nicht derart sind, daß die dritte Folge der beiden anderen ist, so haben wir eine Dreiecksaufgabe vor uns. Ist die erhaltene Endgleichung vom ersten oder zweiten Grade, so ist sie immer mit Hülfe rationaler Ausdrücke und Quadratwurzeln aus bekannten Größen lösbar und wie wir wissen, darum auch mit Hülfe von Zirkel und Lineal die entsprechende geometrische Aufgabe. Ist die erhaltene Endgleichung 4ten, $8^{\text{ten}} \ldots 2^{m\,\text{ten}}$ Grades, so ist eine Zurückführung auf quadratische Gleichungen keineswegs immer möglich, ist sie 3ten, 5ten, 6ten usw. Grades und ist diese Gleichung nicht zerlegbar, dann ist die Lösung der geometrischen Aufgabe mit Zirkel und Lineal unmöglich. Zu diesen Aufgaben gehören die beiden altberühmten der Würfelverdoppelung und der Dreiteilung des Winkels. Sie führen auf die beiden einfachen Gleichungen dritten Grades $x^3 = 2a^3$ und $x^3 = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Die Schritte, welche zum Erweis vorstehender Darlegung führen, sind folgende:

1. Jeder rationale Ausdruck erster Dimension kann mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden. Sei gegeben $x = \frac{a^{n+1}}{b^n}$, wo a und b gegebene Strecken sind. Wir zerlegen ihn in $x = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$. Dann konstruieren wir $\alpha = \frac{a^2}{b}$ und ersetzen x durch $\frac{\alpha a}{b} \cdot \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}$. Indem wir nun $\beta = \frac{a\alpha}{b}$ konstruieren und so fortfahren, gelangen wir ans Ziel. Ist der Ausdruck gegeben $x = \frac{a^4 + b^4}{c^3 + d^3}$, wo a, b, c, d gegebene Strecken, so dividiert man Zähler und Nenner durch c^2 und vereinigt im Nenner $c + \frac{d^3}{c^2}$ zu einer Strecke α. Im Zähler erhält man $\frac{a^4}{c^2} = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c} = \beta^2$ und $\frac{b^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \gamma^2$. Ersetzt man die Summe $\beta^2 + \gamma^2$ durch $\beta\left(\beta + \frac{\gamma^2}{\beta}\right)$, so hat man im Zähler $\beta\delta$, im Nenner α, kann also x finden. Die bisher behandelten Aufgaben führen so auf die Grundaufgaben $x : a = a : b$; $x : \alpha = a : b$ und können durch die ersten Ähn-

lichkeitssätze gelöst werden. Die behandelten Beispiele zeigen, wie jede andere Aufgabe dieser Art zu lösen ist.

2. Jeder Ausdruck, welcher außer rationalen auch Quadratwurzeln aus bekannten Größen, beide in endlicher Zahl enthält, ist mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruierbar. Entstammt die Aufgabe der Geometrie, so ist die auftretende Gleichung stets homogen. Einfache Aufgaben werden unten S. 264 gegeben. Hier führen wir auf:

$$x^2 = a^2 + b^2,\quad x^2 = ab.$$

Auf diese zurückführbar sind:

$$x^4 = a^4 + b^4 = a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right) \quad \text{oder} \quad x^8 = a^8 + b^8.$$

Um die zeitraubende Berücksichtigung der Dimension zu vermeiden, führen wir irgend eine Strecke als Einheit ein.

3. Umgekehrt führt jede quadratische Irrationalität auf eine Gleichung 2^n Grades, wobei n sehr groß sein kann (vgl. S. 141). Sei

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

so findet sich

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6},\quad x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3},\quad x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{3},\quad x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{3},$$
$$x_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Die Gleichung ist irreduktibel. Wenn eine ihrer Wurzeln einer anderen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügt, so müssen alle ihre Wurzeln diese Gleichung befriedigen. Für

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

ergibt sich:

$$x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 2880x^2 + 576 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die aus der Addition von $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$ hervorgehenden, also

$$aaa,\quad aab,\quad aba,\quad abb,\quad baa,\quad bab,\quad bba,\quad bbb,$$

wenn man das positive Vorzeichen mit a, das negative mit b ausdrückt. Nimmt man

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{5}},$$

so gewinnt man eine Gleichung 16ten Grades. Es ist

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = \sqrt{3} + \sqrt{5},$$

$$x^4 + 12x^2 - 4 - 4x(x^2 + 2)\sqrt{2} = 2\sqrt{15},$$

$$x^8 + 56x^6 + 264x^4 + 32x^2 - 44 = 8x(x^6 + 14x^4 + 20x^2 - 8)\sqrt{2}.$$

Diese Gleichung ist dann nochmals zu quadrieren.

4. Wenn es daher gelänge, den Winkel durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal zu dritteln, so brauchte man nur die Konstruktion durch Rechnungsausdrücke zu ersetzen und hätte die Lösung der Gleichung dritten Grades durch Quadratwurzeln. Es ist schwierig und verspricht keineswegs ein der aufgewandten Mühe entsprechendes Ergebnis, wenn man diese Methode auf die von einzelnen Grüblern immer wieder angegebenen, oft sehr verwickelten Lösungen anwendet. Ein besseres Verfahren besteht darin, daß man die angebliche Lösung auf bestimmte Winkel anwendet und ihr durch trigonometrische Rechnung nachgeht. Als vorteilhaft erweisen sich dabei die Winkel 20°, 40°, 80°, 100° usw., nicht aber 36°, 45°, 72° usw. Für letztere kann die angebliche Lösung stimmen, für erstere niemals. Häufig sind die angeblichen Lösungen Näherungskonstruktionen und als solche nicht wertlos. Vgl. die Lösung von Averdieck, Jahresbericht Coesfeld, 1886 und die Bearbeitung von Lampe, Crelle 105, welche die Bestimmung der größten Abweichung gibt. Andere Lösungen siehe: M. Simon, Die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert. B. G. Teubner 1906.

Wirkliche Lösungen können gegeben werden durch höhere Kurven. Diese Lösungen waren schon den griechischen Mathematikern geläufig. Wir verweisen auf die Darstellung bei Cantor und Tropfke.

Interessant ist die Frage, ob statt Zirkel und Lineal auch andere Werkzeuge angegeben werden können, um dieselben geometrischen Aufgaben zu lösen, welche auf quadratische Gleichungen führen. Hier ist zunächst Mascheroni zu nennen. Er löst die geometrischen Aufgaben unter Anwendung des Zirkels und unter Verzicht auf das Lineal. Gerade Linien werden bestimmt durch Angabe von zwei sie bestimmenden Punkten. Ein noch bedeutsamerer Versuch ist von Steiner gemacht. Er löst die geometrischen Aufgaben mit Hülfe des Lineals und eines festen in der Zeichnungsebene gegebenen Kreises, dessen Mittelpunkt auch gegeben ist. Von italienischen Mathematikern ist neuerdings diesem Gegenstande große Aufmerksamkeit zugewendet und das Lineal mit zwei parallelen Kanten oder ein fester Winkel, dessen Schenkel als Linealkanten dienen, studiert worden. Vgl. Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900, art. IX.

§ 15. Einige Anwendungen.

1. Das vollständige Viereck. Sind vier Punkte (Fig. 123) gegeben, A, B, C, D, so können im ganzen sechs Verbindungslinien gezogen werden, die sich in drei Paaren anordnen lassen:

AB und CD; Schnittpunkt E;
AC „ BD; „ F;
AD „ BC; „ G.

Diese drei Punkte E, F, G bilden das Diagonaldreieck.

Auf jeder Seite (AB) sind vier harmonische Punkte vorhanden, nämlich die zwei Ecken (A, B) und als ihnen zugeordnet: Ecke des Diagonaldreiecks und Schnittpunkt seiner Gegenseite. In jedem der drei Diagonalpunkte bilden die beiden Seiten und die beiden Diagonalen vier harmonische Strahlen und zwar je ein Paar zugeordnete. Dieselbe Figur kann auch als vollständiges Vierseit, gebildet aus vier beliebigen Geraden, angesehen werden.

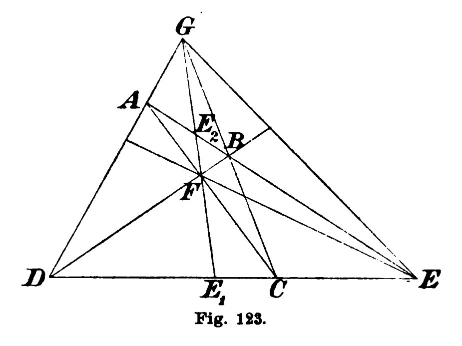


Fig. 123.

Der Beweis für die harmonische Eigenschaft ergibt sich leicht. Das Dreieck GDC wird von der Transversale ABE durchsetzt, daher nach Menelaus:

$$\frac{ED}{EC} \cdot \frac{BC}{BG} \cdot \frac{AG}{AD} = 1.$$

Ferner nach Ceva bezüglich des Punktes F:

$$\frac{E_1 D}{E_1 C} \cdot \frac{BC}{BG} \cdot \frac{AG}{AD} = 1,$$

also

$$ED : EC = E_1 D : E_1 C.$$

Ist $ABCD$ ein Kreisviereck, so sind E_1 und E_2 dem Punkt E harmonisch zugeordnet bezüglich der Kreispunkte D, C und A, B. Somit ist GF die dem Punkte E zugeordnete Polare. Sie geht auch durch die Berührungspunkte der von E an den Kreis gelegten Tangenten. Daher ergibt sich eine Methode, an einen Kreis von einem äußeren Punkte lediglich mit dem Lineal eine Tangente zu ziehen. Figur 124 zeigt die Ausführung.

2. Der Feuerbachsche Kreis. Wir schicken folgende Bemerkung voraus. In Fig. 122 ist $FODB$ ein Kreisviereck. Also ist

$CO \cdot CF = CD \cdot CB$. Ein durch die beiden Höhenfußpunkte F, D und die Mitte von BC gelegter Kreis muß folglich CO halbieren. Denn für C hat man bezüglich dieses Kreises die aus der vorigen folgende

$$\tfrac{1}{2} \cdot CO \cdot CF = \tfrac{1}{2} CB \cdot CD.$$

Nun betrachten wir Fig. 125. Sei $BD = DC$, $BF = FA$, $AE = EC$ und $AD_1 \perp BC$. Durch Umlegung des Dreiecks AFE erhält man FDE und FD_1E. Folglich ist FDD_1E ein Kreisviereck. Da dasselbe entsprechend für die anderen Seiten gilt, ist der Satz bewiesen:

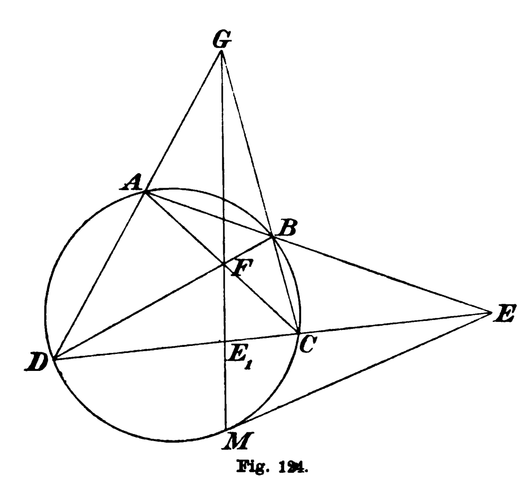


Fig. 124.

Die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mitten der oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreise, dem Feuerbachschen Neunpunktekreis.

Die Strecke DD_1 ist nunmehr zu berechnen. Da

$$BD_1 = c \cos \beta, \quad BD = \frac{a}{2},$$

so findet sich

$$DD_1 = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{(b + c)(b - c)}{2a}.$$

Aus Winkelberechnung folgt, wie in der Figur angedeutet ist, daß $\sphericalangle D_1ED = \beta - \gamma$, also unter diesem Winkel (Tangenten-Sehnenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel $\beta - \gamma$) der Feuerbachsche Kreis die BC schneidet. Der Punkt D liegt auch in der Mitte zwischen den Berührungspunkten des Inkreises und Ankreises auf BC. Die Entfernung von jedem dieser Punkte (S. 250, Fig. 115) ist also $\tfrac{1}{2}(b - c)$. Halbieren wir nun den Winkel bei A, so zerschneidet die Halbierungslinie die BC in die Stücke MB und MC, $ac : (b + c)$ und $ba : (b + c)$. Der Abstand des Treffpunktes von D ist

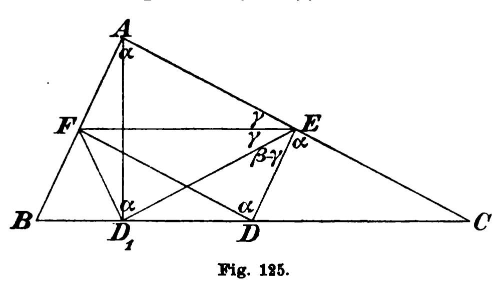


Fig. 125.

$$\frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} = DM;$$

nun machen wir D zum Augenpunkt einer umgekehrten Abbildung. Die Potenz sei $\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$. Dann bleibt BC selbst und der Inkreis wie der Ankreis unverändert. Der Feuerbachsche Kreis wird zur Geraden, welche BC unter einem Winkel $\beta - \gamma$ schneidet. Suchen wir den Schnittpunkt. Es ist

$$DD_1 \cdot DM = \frac{(b+c)(b-c)}{2a} \cdot \frac{a(b-c)}{2(b+c)} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Also ist M der D_1 entsprechende Punkt, folglich M der Schnittpunkt des Bildes. Dieses Bild des Feuerbach ist nun die zweite innere gemeinsame Tangente des Inkreises und Ankreises (Fig. 115). Denn sie geht durch M und bildet mit BC den Winkel $\beta - \gamma$ (Fig. 115, Umlegung des Dreiecks ABC um AO als Achse). Folglich hat der Feuerbachsche Kreis als Bild der Tangente dieselbe Eigenschaft und es folgt der merkwürdige Satz:

Der Inkreis und die drei Ankreise eines Dreiecks werden von dem Feuerbachschen Kreise berührt.

3. Der Pascalsche Satz. Auf einem Kreise seien sechs Punkte beliebig gegeben. Wir bezeichnen sie in beliebiger Anordnung mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dann ziehen wir:

12	und 45;	Schnittpunkt	α,
23	„ 56;	„	β,
34	„ 61;	„	γ.

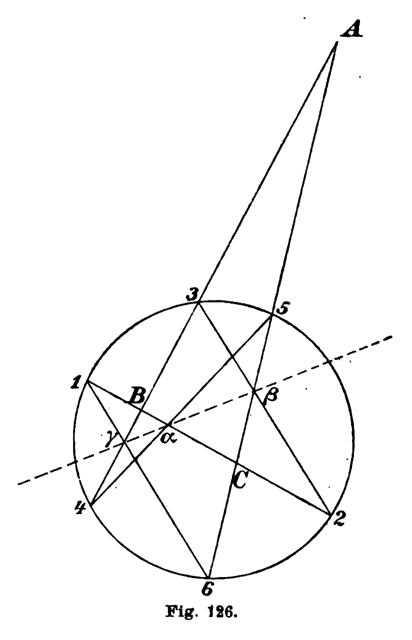


Fig. 126.

Dann liegen α, β, γ in gerader Linie.

Für den Beweis achten wir auf die sechs auftretenden Linien. 12 ist mit 45 schon zusammengestellt; mit 23 und 61 hat 12 je einen Punkt auf dem Kreise gemein. Es bleibt 34 und 56. Bilden wir aus 12, 34, 56 das Dreieck ABC. Seine Seiten werden von den drei anderen 23, 45, 61 durchsetzt. Bilden wir die Gleichungen des Menelaus für diese drei Linien. Es ist:

$$\frac{\beta A}{\beta C} \cdot \frac{2C}{2B} \cdot \frac{3B}{3A} = 1; \quad \frac{\alpha C}{\alpha B} \cdot \frac{4B}{4A} \cdot \frac{5A}{5C} = 1; \quad \frac{\gamma B}{\gamma A} \cdot \frac{6A}{6C} \cdot \frac{1C}{1B} = 1.$$

Wir multiplizieren und beachten:

$$2C \cdot 1C = 5C \cdot 6C;\quad 3B \cdot 4B = 2B \cdot 1B;\quad 5A \cdot 6A = 3A \cdot 4A.$$

Dann wird

$$\frac{\beta A}{\beta C} \cdot \frac{\alpha C}{\alpha B} \cdot \frac{\gamma B}{\gamma A} = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen und wir haben den Pascalschen Satz:

In einem Kreissechseck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten stets auf einer geraden Linie.

Der Satz gilt genau so für jeden Kegelschnitt. Dies läßt sich durch Projektion sofort erweisen. Da die Bezeichnung der Punkte des Sechsecks durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in vielfach verschiedener Weise (wesentlich verschieden sind 60) geschehen kann, so erhält man weitere Sätze, die am besten der projektiven Geometrie überlassen bleiben.

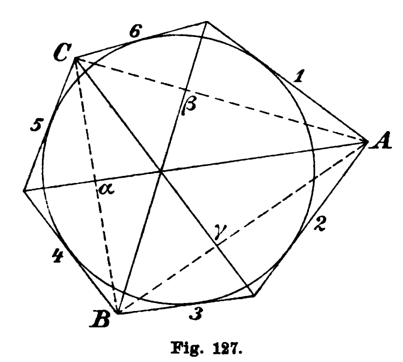


Fig. 127.

Dem Pascalschen Satze steht dual gegenüber der Satz von Brianchon.

In einem Tangentensechsseit (bei Kreis und Kegelschnitt) schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte.

Der Satz kann mit Hülfe des Ceva bewiesen werden.

Einen einfachen Beweis dieses Satzes hat Bing gegeben; vgl. H. G. Zeuthen, Grundriß einer elementar geometrischen Kegelschnittslehre, B. G. Teubner 1882.

Zu den wichtigsten und interessantesten Anwendungen der rechnenden Geometrie zählt die Lösung der quadratischen Gleichungen durch Zeichnung. Bezeichnen wir Fig. 79, Seite 219 OB mit x, so ist $OC = x + 2r$, $OA = b$,

$$x(x + 2r) = b^2.$$

Setzen wir dagegen $OC = x$, also $OB = x - 2r$, so ist

$$x(x - 2r) = b^2.$$

Entsprechend setzen wir in Fig. 80 $OB = x$, $OC = 2r - x$, $OA = b$. Dann haben wir

$$x(2r - x) = b^2.$$

Genau dieselbe Gleichung würden wir erhalten haben, wenn wir $OC = x$, $BO = 2r - x$ gesetzt hätten.

Hiernach haben wir die Lösung der drei Gleichungsformen

$$x^2 + ax = b^2, \quad x^2 - ax = b^2, \quad x^2 - ax = -b^2$$

erhalten. Die Lösungen sind auch an der Figur nachweisbar. So ist in Fig. 79 $a = OD = \sqrt{r^2 + b^2}$, in Fig. 80 $OD = a = \sqrt{r^2 - b^2}$. Deshalb hat die Gleichung (Fig. 79)

$$x^2 + 2rx = b^2$$

die Lösung:

$$x = OB = OD - BD$$

oder

$$x = -r + \sqrt{r^2 + b^2}.$$

Ebenso findet sich aus Fig. 80 für die Gleichung:

$$x^2 - 2rx = -b^2,$$

da $x = OB = r - OD$ oder $x = OC = r + OD$ ist, die Lösung:

$$x = r \pm \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Im letzteren Falle erhalten wir zwei Strecken als Lösungen, im ersteren haben wir zwei Unterfälle, die aber beide nur eine Lösung ergeben, wenn die Lösung eine Strecke, z. B. eine Dreiecksseite sein soll. Ist die Lösung eine Koordinate, so hat auch die negative Lösung geometrischen Sinn.

Hat die gegebene Gleichung nicht die obige Form, so ist sie zunächst umzuwandeln. Indes empfiehlt es sich häufig, die Gleichung algebraisch aufzulösen und die so entstehenden Ausdrücke zu konstruieren.

Eine bemerkenswerte Aufgabe ist die durch die Gleichungen $x + y = a$, $xy = b^2$ gestellte. Sie verlangt Herstellung eines Rechtecks, dessen Inhalt und Seitensumme man kennt. Wenn man sich der Entwicklungen, die zur Siebzehnteilung des Kreises führten, erinnert, S. 83 und 84, so erkennt man, daß die Siebzehnteilung durch wiederholte Lösung dieser Aufgabe gelang. Bei wirklicher Ausführung ersetzt man vorher die negativen Größen, wie z. B. z S. 83 durch $-z'$, wodurch z' eine durch Festsetzung der Einheit bestimmte Strecke wird.*)

Die gleiche Aufgabe liegt der Fünf- und Zehnteilung des Kreises zugrunde. Die Schullösung geht von einem gleichschenkligen Dreieck mit den Basiswinkeln 72°, also dem dritten Winkel 36° aus. Halbiert man einen Basiswinkel, so zerfällt das Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke mit den Winkeln 72°, 72°, 36° und

*) Eine geometrographische Siebzehnteilung gab R. Güntsche, Sitzungsb. d. math. Gesellschaft, Berlin 1903.

36^0, 36^0, 108^0. Das ursprüngliche Dreieck habe die Seiten a, a, x; dann haben die Teildreiecke die Seiten x, x, $a - x$ und x, x, a. So ergibt sich die Verhältnisgleichung:

$$(a - x) : x = x : a,$$

weil die Dreiecke a, a, x und x, x, $a - x$ ähnlich sind, oder:

$$x^2 + ax = a^2.$$

Nennen wir die Wurzeln dieser Gleichung y und $-z$, so haben wir die Aufgabe:

$$z - y = a, \quad yz = a^2.$$

Die Seite des Zehnecks ist durch den positiven Wert y gegeben. Nimmt man $a = 1$ und setzt

$$x^2 = 1 - x,$$

$$x^3 = x - x^2 = 2x - 1, \quad x^4 = 2x^2 - x = 2 - 3x \quad \text{usw.},$$

$$x^m = -x^{m-1} + x^{m-2},$$

so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} x^2 &= -\ x + 1, & x^5 &= 5x - 3, & x^9 &= 34x - 21, \\ x^3 &= 2x - 1, & x^6 &= -8x + 5, & x^{10} &= -55x + 34, \\ x^4 &= -3x + 2, & x^7 &= 13x - 8, & x^{11} &= 89x - 55. \end{aligned}$$

Da $x < 1$, so stellen die rechten Seiten mit Null verglichen Näherungen dar für die Teilung nach dem goldenen Schnitt, z. B.

$$89 : 55 \sim 55 : 34;$$

es ist

$$89 \cdot 34 = 3026, \quad 55 \cdot 55 = 3025.$$

Die Kreisberechnung wird in der Trigonometrie erledigt.

Zum Schlusse mag noch der Ptolemaeische Lehrsatz eine kurze Darstellung finden. Wir schließen sie an Fig. 36, S. 193 an. Nach unserer Formel (§ 13, S. 247) $4rI = abc$ können wir den Inhalt der Dreiecke ABC und ADC und damit einen Ausdruck für den Inhalt des Vierecks erhalten. Denn r hat für beide Dreiecke denselben Wert. Sei I der Inhalt des Vierecks und

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = e, \quad BD = f.$$

Dann ist durch Addition der Teildreiecke

(1) $$4rI = (ab + cd)e; \quad 4rI = (ad + bc)f.$$

Dieselbe Formel gestattet, einen Ausdruck für die von B auf AC gefällte Höhe h_2 zu finden. Es wird $2rh_2 = ab$. Ebenso findet sich für die von D auf AC gefällte Höhe h_4

$$2rh_4 = cd, \quad \text{also} \quad 2r(h_2 + h_4) = ab + cd.$$

Nun legen wir das Dreieck ABC so um, daß A und C ihre Plätze wechseln. B falle auf B_1, den Schnittpunkt des Kreises mit der durch B zu AC gezogenen Parallelen. Wir setzen $DB_1 = g$. Betrachten wir nun das Dreieck DBB_1. Seine Höhe ist $h_2 + h_4$, sein Umkreisradius r. Folglich ergibt sich aus unserer Formel $4rI = abc$ in Anwendung auf dies Dreieck DBB_1

$$fg = ab + cd. \tag{2}$$

Durch Betrachtung des Vierecks AB_1CD, welches für I und r dieselben Werte besitzt wie $ABCD$ folgt nun

$$4rI = (ac + bd)g. \tag{3}$$

Mithin aus (1), (2), (3)

$$16r^2I^2 = (ad + bc)(ac + bd)fg,$$

$$16r^2I^2 = (ad + bc)(ac + bd)(ab + cd). \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (1) folgt:

$$16r^2I^2 = (ab + cd)(ad + bc)ef,$$

also

$$ef = ac + bd. \tag{5}$$

Die drei Strecken e, f, g stehen mit den Seiten a, b, c, d in den merkwürdigen Beziehungen, die wir entwickelt haben. Quadriert man (1) und wendet dann (4) an, so erhält man Bestimmungen für e^2, f^2, g^2. Die Inhaltsformel leitet man am einfachsten trigonometrisch ab, wobei man den Satz des Ptolemaeus als Zugabe findet. Setzt man $2\sigma = a + b + c + d$, so wird

$$I^2 = (\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)(\sigma - d). \tag{6}$$

Aus (4) folgt dann der Wert von r.

Nennt man die den Seiten a, b, c, d im Innern entsprechenden von ihnen als Sehnen gespannten Winkel α, β, γ, δ, so ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0$. Ferner ist:

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma, \quad d = 2r \sin \delta,$$

$$f = 2r \sin(\beta + \gamma) = 2r \sin(\alpha + \delta),$$

$$g = 2r \sin(\alpha + \gamma), \quad e = 2r \sin(\alpha + \beta).$$

Der gewöhnliche Schulbeweis des Ptolemaeus fußt gleichfalls auf dem Gedanken, das eine Teildreieck umzulegen. DB_1 schneidet AC in E und Dreieck DEC hat die Winkel α und δ, die auch in DAB vorkommen. Ebenso wird $DAE \sim DBC$, wodurch AE und EC bestimmt sind.

Noch verdient folgende Herleitung Erwähnung. Wir greifen auf der Kreisperipherie einen Zählpunkt O heraus und nennen, indem

wir den Kreis umlaufen, die den Bögen OA, OB, OC, OD entsprechenden Zentriwinkel φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Dann entsprechen den Seiten des Vierecks als Sehnen die Zentriwinkel $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2$, $\varphi_4 - \varphi_3$, $\varphi_1 - \varphi_4 + 360^0$, den Diagonalen die Zentriwinkel $\varphi_3 - \varphi_1$, $\varphi_4 - \varphi_2$. Nun beachten wir die Selbstgleichung:

$$(7)\quad (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3) = 0.$$

Wir setzen

$$\lambda_m = \operatorname{tg}\frac{\varphi_m}{2}, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Dann erscheint nach Umformung der Tangens mit Hülfe des Subtraktionstheorems des Sinus im Nenner der drei Summanden von (7) das Produkt

$$\cos\frac{\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_3}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_4}{2}.$$

Im Zähler treten die Sinus der halben Differenzen der φ auf, welche durch Seiten und Diagonalen ersetzt den Satz des Ptolemaeus liefern. Vgl. F. Meyer, Archiv der Mathematik und Physik (3), 7 (1904) und Verhandlungen des Mathematikerkongresses in Heidelberg, S. 674.

Der Satz des Ptolemaeus ist umkehrbar, worauf wir weiter unten zurückkommen.

Dritter Teil.

Trigonometrie.

Erster Abschnitt: **Goniometrie.**

§ 1. Begriffserklärungen.

Die Trigonometrie ist derjenige Teil der Mathematik, welcher aus gegebenen Stücken geometrischer Gebilde die übrigen durch Rechnung bestimmt. Die Bestimmung gewisser Strecken, Flächen, Körperinhalte aus anderen wird auch in der analytischen Geometrie und der rechnenden Geometrie vorgenommen. In der Trigonometrie kommt es besonders auf die Bestimmung der Winkel an.

Die Bestimmung der Winkel geschieht durch gewisse Verhältniszahlen, die trigonometrischen Funktionen. Gehen wir vom spitzen Winkel aus. Im Dreieck ABC (Fig. 128) liege der rechte Winkel bei C. Dann setzen wir

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot\alpha = \frac{b}{a}.$$

Die Aussprache ist Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens. Über die Geschichte dieser Bezeichnungen vgl. Tropfke, ausführlich handelt über alle in Betracht kommenden geschichtlichen Fragen das vortreffliche Buch von O. Braunmühl, Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie, Teubner 1900—1903. Man sollte dem historischen linea tangens entsprechend die Tangens sagen.

Fig. 128.

Eine einzige trigonometrische Funktion genügt zur Bestimmung des Winkels. Es müssen daher zwischen den vier Funktionen Gleichungen bestehen. Dies ist, wie das Dreieck zeigt, richtig. Denn es ist

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Folglich

$$(1)\quad \begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2+a^2}{c^2} = 1. \\[4pt] \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \\[4pt] \cot\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \\[4pt] \operatorname{tg}\alpha\cdot\cot\alpha = 1. \end{cases}$$

Die gegenseitige Abhängigkeit der trigonometrischen Funktionen kann man leicht tabellarisch zusammenstellen. Diese Zusammenstellung hat jedoch wissenschaftlich nur geringen und pädagogisch gar keinen Wert. Die Schreibart $\sin^2\alpha$ statt $\sin\alpha^2$ oder $(\sin\alpha)^2$ hat schon Gauß beklagt. Sie hat sich glücklicherweise durchgesetzt. Merken wir uns:

$$(2)\quad \begin{cases} 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \\[4pt] 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}. \end{cases}$$

Der Schüler hat sich vor allem einzuprägen, daß die trigonometrischen Funktionen nur im rechtwinkligen Dreieck unmittelbar gegeben sind, nicht im schiefwinkligen. Diese Einprägung gestaltet sich am wirkungsvollsten, wenn bei der ersten Einführung im schiefwinkligen Dreieck die Höhen gefällt und an diesen die Sinus der Dreieckswinkel erklärt werden. Daher ist der zweckmäßigste Ausgangspunkt für den ersten Unterricht die Heronische Formel. Wir kommen hierauf weiter unten zurück.

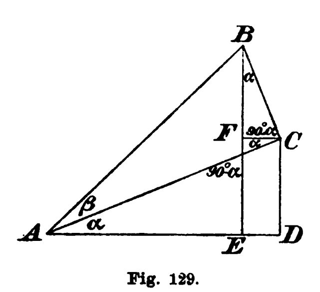


Fig. 129.

§ 2. Die Additionstheoreme.

Die beiden spitzen Winkel α und β fügen wir in der Weise zusammen, wie Fig. 129 zeigt. Dann sei auch noch $\alpha+\beta$ ein spitzer Winkel. Es sei ferner

$$BE \perp AE,\quad BC \perp AC,\quad CF \perp BE.$$

Dann ist

$$AB\cdot\sin(\alpha+\beta) = FB + FE = BC\cdot\cos\alpha + AC\cdot\sin\alpha;$$

$$(3)\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ebenso ist

$$AB \cdot \cos(\alpha + \beta) = AE = AD - DE = AC \cdot \cos\alpha - BC \sin\alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \tag{4}$$

Diese beiden Formeln können wir in eine zusammenziehen. Es ist

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta + i \sin\beta). \tag{5}$$

Aus den Additionstheoremen ergeben sich die Subtraktionstheoreme. Ersetzen wir die allgemeine Größe α durch $\alpha - \beta$, so gehen die Formeln (3) und (4) über in:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin(\alpha - \beta)\cos\beta + \cos(\alpha - \beta)\sin\beta, \\ \cos\alpha = \cos(\alpha - \beta)\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)\sin\beta. \end{cases} \tag{6}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach Multiplikation der ersten mit $\cos\beta$, der zweiten mit $\sin\beta$ und nach Subtraktion:

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = (\sin^2\beta + \cos^2\beta)\sin(\alpha - \beta).$$

Ebenso ergibt sich

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = (\sin^2\beta + \cos^2\beta)\cos(\alpha - \beta).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

erhält man also die beiden Subtraktionstheoreme

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{cases} \tag{7}$$

Beide Sätze können auch geometrisch abgeleitet werden. Die hier gegebene Herleitung aus den Additionstheoremen hat den Vorteil, daß der Geltungsbereich sofort feststeht. Er deckt sich mit dem Geltungsbereich der Additionstheoreme. α und β müssen beide spitz sein und $\alpha < \beta$ ist ausgeschlossen. Noch etwas einfacher ist folgende Ableitung.

Ersetzt man in (5) α durch $\alpha - \beta$, so folgt:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = (\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta))(\cos\beta + i\sin\beta),$$

also nach Multiplikation mit $\cos\beta - i\sin\beta$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = (\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta))(\cos^2\beta + \sin^2\beta),$$

also:

$$\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta). \tag{8}$$

Diese Formel faßt die beiden Gleichungen (7) zusammen.

§ 3. Der Moivresche Lehrsatz.

Wenn wir in Gl. (5) α durch $\alpha + \gamma$ ersetzen, dann auf der rechten Seite $\cos(\alpha + \gamma) + i \sin(\alpha + \gamma)$ gemäß (5) durch das Produkt der Ausdrücke $\cos \alpha + i \sin \alpha$ und $\cos \gamma + i \sin \gamma$ ersetzen, so erhalten wir:

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \gamma + i \sin \gamma).$$

Diese Schlußfolgerung läßt sich beliebig oft wiederholen, und als Ergebnis erhalten wir den Satz:

Bilden wir das Produkt der Ausdrücke:

$$\begin{gathered} \cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1, \\ \cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cos \alpha_n + i \sin \alpha_n, \end{gathered}$$

so erhält man den ähnlich gebauten Ausdruck:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

Dieser Satz gilt für jetzt nur, wenn die Summe der Argumente kleiner als 90^0 ist. Wir werden bald in der Lage sein, diese Beschränkung abzustreifen. Setzen wir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = \alpha,$$

so geht der gefundene Satz in die Beziehung über

$$\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n. \tag{9}$$

Dies ist der Moivresche Lehrsatz.

Für $n = 2$ ergibt sich:

$$\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 i \sin \alpha \cos \alpha,$$

also

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1, \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha &= 1 + \cos(2\alpha), \\ 2 \sin^2 \alpha &= 1 - \cos(2\alpha), \end{aligned}$$

also

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}} \\ \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (10) enthalten die Aufgabe der Verdopplung, (11) die der Halbierung des Winkels. Das Vorzeichen ist in (11) positiv zu nehmen, weil unsere Erklärung nur positive Zahlen als Werte der Winkelfunktionen zuläßt.

Für den Unterricht empfiehlt es sich, die gewonnenen Sätze an geometrischen Beispielen zu bewähren. Das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck liefert

$$\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Daraus folgt für die Anwendung auf (10)

$$\cos 90^0 = 0, \quad \sin 90^0 = 1.$$

Die Gültigkeit dieses Schlusses kann bezweifelt werden, weil wir Sinus und Kosinus nur für spitze Winkel erklärt haben.

Das gleichseitige Dreieck liefert

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^0 = \tfrac{1}{2}.$$

Auch liefert es

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Für (10) und (11) kann man hieraus Bestätigungen gewinnen.

Läßt man den Winkel immer mehr abnehmen, so wird die Gegenkathete immer kleiner bei gleichbleibender Hypotenuse. Zugleich wird die Nebenkathete immer mehr der Hypotenuse gleich. Dieselben Grenzbetrachtungen in der Nähe des rechten Winkels angewendet zeigen, daß bei gleichbleibender Hypotenuse die Gegenkathete sich von der Hypotenuse beliebig wenig unterscheidet, während die Nebenkathete verschwindet. So ergeben sich die vier Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \sin 0^0 = 0, & \cos 0^0 = 1, \\ \sin 90^0 = 1, & \cos 90^0 = 0. \end{cases}$$

Außer den bisher erhaltenen Funktionswerten erhalten wir (S. 77 und 265) als weitere Quelle das regelmäßige Zehneck. Wir finden

$$\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 72^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Daraus folgt in geometrischer Überlegung:

$$\sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Die Formeln (10) liefern dann:

$$\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad \sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

oder

$$\cos 54^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \sin 54^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Sämtliche Wurzeln sind positiv zu nehmen.

Durch Verwendung des Subtraktionstheorems erhält man nun aus $36^0 - 30^0 = 6^0$

$$\sin 6^0 = \sin 36^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 36^0 \cdot \sin 30^0,$$

$$\cos 6^0 = \cos 36^0 \cdot \cos 30^0 + \sin 36^0 \cdot \sin 30^0.$$

Hieraus folgt weiter

$$\sin(36^0 + 6^0) = \sin 42^0 \quad \text{und} \quad \cos 42^0.$$

Wendet man nun noch die Formeln der Subtraktion an, so ergeben sich $\sin(45^0 - 42^0)$, also $\sin 3^0$ und $\cos 3^0$. Indem man von diesen Werten aufsteigt, ist es ein leichtes, die Funktionen aller Winkel zu berechnen, deren Gradzahl durch 3 teilbar ist. Wir wollen uns merken, daß die Funktionen der Winkel, deren Gradzahl durch 3 teilbar ist, nur quadratische Irrationalitäten enthalten. Daraus folgt: Winkel, deren Gradzahl durch 3 teilbar ist, können mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden; arithmetisch ausgedrückt: Die Funktionswerte dieser Winkel kann man durch Lösung quadratischer Gleichungen genau berechnen.

Mit Hülfe des Subtraktionstheorems erhält man unter Zuhülfenahme der Gleichungen (12)

$$\sin(90^0 - \alpha) = \sin 90^0 \cos\alpha - \cos 90^0 \sin\alpha = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \cos 90^0 \cos\alpha + \sin 90^0 \sin\alpha = \sin\alpha.$$

Man bestätigt dies sofort aus Fig. 128. Es ist

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha.$$

Ebenso ergibt sich aus der Erklärung an der Figur 128

$$\operatorname{tg}(90^0 - \alpha) = \frac{b}{a} = \cot\alpha,$$

$$\cot(90^0 - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha,$$

Diese Formeln

$$(13)\qquad \begin{cases} \sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha, & \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha, \\ \operatorname{tg}(90^0-\alpha)=\cot\alpha, & \cot(90^0-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

treten besonders klar in die Erscheinung, wenn man die gewonnenen Ergebnisse tabellarisch ordnet.

Die Berechnung der Funktionswerte für einen Winkel, dessen Gradzahl ganz, aber nicht durch drei teilbar ist, kann durch eine Kette quadratischer Gleichungen nicht geleistet werden. Das ist ein Punkt von großer Bedeutung für das Problem der Dreiteilung eines beliebigen Winkels. Wenn eine solche Lösung wirklich bestände, so müßte sie auch für den Winkel von 30^0 gültig sein. Also müßte die Berechnung der Sinus und Kosinus des Winkels von 10^0 durch eine Kette von Quadratwurzeln in endlicher Zahl gelingen. Denn jede noch so verwickelte Zeichnung von Kreisen und geraden Linien kann nur solche Punkte und Strecken ergeben, deren rechnerische Bestimmung, soweit sie nicht rational sind, durch Quadratwurzeln aus gegebenen Größen gelingt. Sehen wir nun zu, von welcher Gleichung die rechnerische Bestimmung von $\sin 10^0$ abhängt.

Aus (9) erhält man für $n=3$

$$\cos(3\alpha)=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha);$$

$$\sin(3\alpha)=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha,$$

oder

$$(14)\qquad \begin{cases} \cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha, \\ \sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha. \end{cases}$$

Für $\alpha=10^0$ wird $\sin(3\alpha)=\frac{1}{2}$, also

$$1=6\sin\alpha-8\sin^3\alpha.$$

Setzen wir $x=2\sin 10^0=2\sin\alpha$, so wird [vgl. Gl. (16), S. 78]

$$(15)\qquad x^3-3x+1=0.$$

Wenn also eine Konstruktion angebbar wäre, welche mit Hülfe von geraden Linien und Kreisen einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile teilte, so müßte Gl. (15) durch Ausziehung von Quadratwurzeln aus gegebenen Zahlen lösbar sein. Sehen wir uns diese Gleichung näher an. Für $x=-2,-1,0,1,2$ nimmt die linke Seite die Werte an $-1,+3,+1,-1,+3$. Daher liegt eine positive Wurzel zwischen 0 und 1 und eine andere zwischen 1 und 2. Erstere ist diejenige, welche dem Werte $x=2\sin 10^0$ entspricht. Denn $\sin 10^0<\sin 30^0$ und $\sin 30^0=\frac{1}{2}$. Nun folgt:

$$\begin{aligned}
x^3 &= 3x - 1,\\
x^4 &= 3x^2 - x,\\
x^5 &= 3x^3 - x^2 = 3(3x-1) - x^2 = -x^2 + 9x - 3.\\
x^6 &= 9x^2 - 6x + 1,\\
x^7 &= -6x^2 + 28x - 9,\\
x^8 &= 28x^2 - 27x + 6,\\
x^9 &= -27x^2 + 90x - 28,\\
x^{10} &= 90x^2 - 109x + 27.
\end{aligned}$$

Allgemein ist

$$x^{m+3} = 3x^{m+1} - x^m,$$

woraus die Berechnung sich fortsetzen läßt. Da nun x^3, x^4, $x^5 \ldots$ Werte von stark abnehmender Größe sind, so erhalten wir durch ihre Gleichstellung mit Null quadratische Gleichungen, welche x mit stets wachsender Genauigkeit, aber nicht völlig genau bestimmen. Sie heißen:

$$x^2 - 9x + 3 = 0, \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0, \quad 6x^2 - 28x + 9 = 0 \quad \text{usw.}$$

Durch Verbindung von zwei solchen einander folgenden Gleichungen erhält man rationale Näherungswerte für x. Wir bemerken:

$$9x^5 + x^6 = 75x - 26, \quad 2x^6 + 3x^7 = 72x - 25,$$

$$10x^9 + 3x^{10} = 573x - 199.$$

Da

$$199 : 573 = 0{,}34\,729\,493\,891,$$

so ergibt sich:

$$x = 0{,}34\,729\,635\,527.$$

Nunmehr sind wir imstande, unsere Tafel durch Angaben aller Funktionswerte der vollen Grade zu bestimmen. Außer quadratischen Gleichungen war nur *eine* Gleichung dritten Grades zu lösen, nämlich Gl. (15). Es empfiehlt sich, diese Gleichung und ihre Lösung durch Zeichnung der Kurve $y = x^3 - 3x + 1$ zu versinnlichen.

§ 4. Die Funktionen beliebiger Winkel.

Wir haben uns bisher nur mit Funktionen spitzer Winkel beschäftigt und Methoden gefunden, für alle Winkel, deren Gradzahl eine ganze Zahl ist, die Sinus und Kosinus, mithin alle Funktionen zu berechnen. Es wäre ein leichtes, auf diesem Wege noch feinere Abstufungen zu erzielen. Indes ist es nicht zweckmäßig, hier zunächst weiter zu gehen. Da unsere Erklärung der trigonometrischen Funktionen nur für spitze Winkel Gültigkeit hatte, mußten wir

unseren Formeln Beschränkungen auferlegen, die abgesehen vom Ursprunge nur als lästige Fesseln erscheinen können. Um sie abzustreifen, kann man verschiedene Wege einschlagen, auch wenn man das Verfahren der Funktionsfortsetzung als wissenschaftlich allein zulässig ansieht. So hat Emil Haentzschel in einer sehr lesenswerten Abhandlung (Jahresb. des Köllnischen Gymnasiums, Berlin 1900) die Verdopplungsformeln zum Ausgangspunkt gewählt. Denselben Dienst würden die Verdreifachungsformeln leisten.

Wir wollen von den Additionstheoremen ausgehen und zu diesem Zweck befreien wir unsere Erklärung nunmehr von der geometrischen Beziehung und stellen folgende neue Erklärung auf.

1. $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sind Zahlwerte, welche durch den nach künstlichem Maß gemessenen Winkel α bestimmt sind.

2. Es ist
$$\sin 90^0 = 1, \quad \cos 90^0 = 0.$$

3. Es ist
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 1.$$

4. Es ist
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Hiermit sind $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ derartig bestimmt, daß für jeden Wert des Winkels ihre Werte eindeutig berechnet werden können. Dies wollen wir jetzt zeigen.

Zunächst wissen wir aus den Entwicklungen des § 3, daß die Additionstheoreme und der Moivresche Lehrsatz logische Folgerungen von Punkt (4) unserer Erklärung sind. Daher ist
$$\cos(90^0+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(90^0+\alpha) = \cos\alpha.$$
Hiermit gewinnen wir
$$\cos 180^0 = -1, \quad \sin 180^0 = 0.$$
Ebenso folgt
$$\cos(180^0+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \sin(180^0+\alpha) = -\sin\alpha.$$
Hieraus gewinnen wir
$$\cos 360^0 = 1, \quad \sin 360^0 = 0.$$
Aus dieser Gleichung ergibt sich
$$\sin(360^0+\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(360^0+\alpha) = \cos\alpha.$$
Hiermit sind $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als periodische Funktionen festgestellt. Ferner ergibt sich, daß die Funktionen der Winkel des ersten Quadranten genügen, um die Funktionswerte für alle übrigen Winkel bis auf das Vorzeichen zu bestimmen. Diese Bestimmung können wir noch in eine etwas einfachere Form setzen. Wir entnehmen dem Subtraktionsgesetz die Gleichungen:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha.$$

Endlich liefert das Subtraktionsgesetz:

$$\sin(\alpha - \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0,$$
$$\cos(\alpha - \alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Es ist also

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1.$$

Weiter erhält man aus dem Subtraktionsgesetz:

$$\sin(0 - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(0 - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Greifen wir nunmehr auf die Moivresche Formel zurück

$$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n.$$

Setzen wir $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, so wird

$$\left(\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}\right)^n = 1.$$

Also ergibt sich:

Die Berechnung der Funktionswerte $\sin\frac{360}{n}$, $\cos\frac{360}{n}$ (vgl. S. 75) ist gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung

$$x^n = 1. \tag{16}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind in der Formel enthalten

$$x = \cos\frac{360\cdot m}{n} + i\sin\frac{360\cdot m}{n},$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Die Lösung dieser Gleichung für $n = 9$ liefert die Funktionen der Winkel 40°, 80°, 160°, 200°, 280°, 320°. Innerhalb des ersten Quadranten also 10°, 20°, 40°, 50°, 70°, 80°. Beachten wir ferner

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

so erhalten wir die Teilung des beliebigen Winkels α in n gleiche Teile durch Lösung der Gleichung

$$x^n = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Die n Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_h = \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{360\cdot h}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{360\cdot h}{n}\right),$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Für die Halbierung hat man also:

$$x_0 = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2},\quad x_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+180^0\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}+180^0\right),$$

$$x_1 = -x_0.$$

Für die Dreiteilung wird:

$$x_0 = \cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3},\quad x_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{3}+120^0\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{3}+120^0\right),$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{\alpha}{3}+240^0\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{3}+240^0\right).$$

Oder, da

$$\cos 120^0 = -\tfrac{1}{2},\quad \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 240^0 = -\tfrac{1}{2},\quad \sin 240^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\alpha}{3},\qquad x_2 = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{3}.$$

Die Verdreifachungsformeln führen zur Reihenentwicklung. Aus (14) folgt

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{3}\sin 3\alpha + \tfrac{4}{3}\sin^3\alpha.$$

Ist 3α ein spitzer Winkel, so ist sein Sinus positiv, also $\sin\alpha < \frac{1}{3}\sin 3\alpha$. Ebenso folgt:

$$\sin\frac{\alpha}{3} < \tfrac{1}{3}\sin\alpha < \tfrac{1}{9}\sin(3\alpha),$$

$$\sin\frac{\alpha}{9} < \tfrac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{3} < \tfrac{1}{9}\sin(\alpha)\ \text{usw.}$$

Hieraus folgt, daß der Sinus eines spitzen Winkels bei Verkleinerung des Winkels beliebig klein wird. Setzen wir nun

$$\sin\alpha = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \cdots,$$

so muß

$$a = c = e = \cdots = 0$$

sein, wie aus $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ hervorgeht. Es sei also

$$\sin\alpha = a_0\alpha + a_1\alpha^3 + a_2\alpha^5 + \cdots,$$

so folgt

$$\sin(3\alpha) = 3a_0\alpha + 27a_1\alpha^3 + 243a_2\alpha^5 + \cdots.$$

Die Gleichung (14) liefert nun

$$3a_0\alpha + 27a_1\alpha^3 + 243a_2\alpha^5 + \cdots$$
$$= 3a_0\alpha + 3a_1\alpha^3 + 3a_2\alpha^5 + \cdots - 4\alpha^3(a_0^3 + 3a_0^2a_1\alpha^2 + \cdots).$$

Die Koeffizientenvergleichung zeigt

$$27a_1 = 3a_1 - 4a_0^3,\quad 243a_2 = 3a_2 - 12a_0^2a_1,$$

$$a_1 = -\tfrac{1}{6}a_0^3,\quad a_2 = \tfrac{1}{120}a_0^5.$$

Die Grðße a_0 bleibt unbestimmt (vgl. S. 113). Für alle bisher erledigten Fragen war es gleichgültig, in welchem Maße der Winkel gemessen wurde. Dies ist nicht mehr gleichgültig, wenn es sich um Beziehungen zwischen den Funktionen und der Größe des Winkels selbst handelt. Um die einfachsten Ausdrücke zu erlangen, setzen wir $a_0 = 1$. Wir erhalten die Entwicklungen

$$\sin\alpha = \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3 + \tfrac{1}{120}\alpha^5 + \cdots$$

und, wie aus $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ folgt,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \cdots.$$

Diese Entwicklungen können wir nun auf einem ganz anderen Wege ebenfalls erlangen und damit das Gesetz der Bildung.

Wir haben die hierher gehörigen Entwicklungen schon S. 110 angedeutet und S. 113 im Anschluß an die Verdopplungsformel mit Hülfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten durchgeführt. Der Gegenstand gehört zu den wichtigsten und schönsten der Schulmathematik.*) Es mag daher gestattet sein, hier eine zweite Entwicklung mitzuteilen, welche sich entsprechend den umseitigen Ausführungen an die Verdreifachung des Winkels anlehnt.

Wir gehen aus von der Reihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Sie ist stets konvergent. Bilden wir nun die Ausdrücke

$$(17) \qquad F(x) = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad G(x) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Dann ist

$$F(x) + iG(x) = e^{xi}, \quad F(x) - iG(x) = e^{-xi},$$

also

$$(18) \qquad F^2(x) + G^2(x) = 1.$$

Ferner ist

$$(F(x) + iG(x))(F(y) + iG(y)) = e^{(x+y)i},$$

also

$$(19) \qquad F(x+y) + iG(x+y) = (F(x) + iG(x))(F(y) + iG(y)).$$

Bilden wir hiernach mehrgliedrige Produkte und setzen die Argumente gleich, so folgt:

$$(20) \qquad F(nx) + iG(nx) = \{F(x) + iG(x)\}^n.$$

*) Vgl. die treffenden Ausführungen von M. Simon in Baumeister, Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre IX, 52 und daselbst IX, 68: „Dieser Zusammenhang der Potenz mit den trigonometrischen Funktionen wirkt völlig dramatisch".

Weiter ergibt sich aus (17)

$$G(0) = 0, \quad G(-x) = -G(x),$$

$$F(0) = 1, \quad F(-x) = \quad F(x).$$

Endlich aus (20):

$$F(3x) = 3F(x) - 4F^3(x).$$

Diese Gleichung stimmt in ihrem Bau mit (14) völlig überein und zeigt also, daß die weitere Entwicklung von $\sin \alpha$ dasselbe Ergebnis herbeiführen muß wie die Funktion $F(x)$.

Hiermit ist das Bildungsgesetz der Reihe für $\sin \alpha$ erschlossen. Wir haben folgendes Gesamtergebnis:

Wenn wir die Winkel in natürlichem Maß bestimmen, wobei für kleine Winkel der Sinus gleich dem mit der Einheit beschriebenen Bogen ist, so ist

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Hiernach ergibt sich, wenn wir dem Zeichen $\sim$ die Bedeutung „entsprechend gleichwertig" beilegen, die Zusammenstellung:

$$2\pi \sim 360^0, \quad \pi \sim 180^0, \quad \frac{\pi}{2} \sim 90^0,$$

$$\frac{\pi}{4} \sim 45^0, \quad \frac{\pi}{3} \sim 60^0, \quad \frac{\pi}{9} \sim 20^0,$$

$$\frac{2\pi}{5} \sim 72^0, \quad \text{usw.}$$

In der neuen Schreibart ist also z. B.

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha.$$

§ 5. Multiplikationstheoreme.

Aus dem Moivreschen Lehrsatz ergibt sich die Möglichkeit, $\sin(n\alpha)$ und $\cos(n\alpha)$ nach Potenzen der Sinus und Kosinus zu entwickeln. In den erhaltenen Ausdrücken treten zunächst die beiden Funktionen auf, und es kann verlangt werden, die Ausdrücke so umzuformen, daß $\sin(n\alpha)$ möglichst durch $\sin \alpha$, $\cos(n\alpha)$ möglichst durch $\cos \alpha$ gegeben werde. Die von uns ermittelten Formeln

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

zeigen, daß für den Sinus die Aufgabe nicht in gleicher Ausdehnung lösbar ist wie für den Kosinus. Genaueres gibt nachstehende Entwicklung.

Wir setzen $x = \cos\alpha$, also $\sqrt{1-x^2} = \sin\alpha$, wobei wir α im ersten Quadranten, also die Wurzel positiv nehmen. Ferner sei

$$\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha = x + \sqrt{x^2-1},$$

also

$$\lambda^{-1} = \cos\alpha - i\sin\alpha = x - \sqrt{x^2-1},$$

weil $\lambda \cdot \lambda^{-1} = 1$.

Dann ist nach Moivre

$$\lambda^n + \lambda^{-n} = 2\cos(n\alpha), \quad \lambda^n - \lambda^{-n} = 2i\sin(n\alpha).$$

Folglich erhalten wir

$$(1) \qquad 2\cos(n\alpha) = (x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n.$$

Diese Gleichung liefert entwickelt $\cos(n\alpha)$ durch $\cos\alpha$ ausgedrückt und zwar für jeden ganzzahligen Wert von n als ganze Funktion von $\cos\alpha$.

Setzen wir $\sin\alpha = x$, also $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, so wird

$$\lambda^n - \lambda^{-n} = 2i\sin(nx),$$

also

$$(2) \qquad 2i\sin(nx) = (\sqrt{1-x^2} + xi)^n - (\sqrt{1-x^2} - xi)^n.$$

Für ungerade n verschwindet rechts die Wurzel und es entsteht ein Ausdruck, welcher $\sin(nx)$ durch $\sin x$ als ganze Funktion darstellt. Für gerade n bleibt ein Faktor $\cos\alpha$.

Aus den Formeln (1) und (2) ergibt sich durch zweimalige Ableitung eine einfache Bestimmung der Koeffizienten. Man findet:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\cos(n\alpha) &= (2\cos\alpha)^n - n(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2\cos\alpha)^{n-4} \\ &\quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3}(2\cos\alpha)^{n-6} + \cdots \\ 2\sin(n\alpha)\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}} &= (2\sin\alpha)^n - n(2\sin\alpha)^{n-2} \\ &\quad + \frac{n(n-3)}{2}(2\sin\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2\cdot 3}(2\sin\alpha)^{n-6} + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Die zweite der Formeln (3) gilt nur für ungerade n. Ersetzt man α durch $\alpha + 90^0$, so gehen die Formeln jede in die andere über. Daher braucht nur eine von ihnen entwickelt zu werden.

Die Berechnung der Koeffizienten kann noch in einem anderen Zusammenhange, vgl. S. 74, vollzogen werden. Da

$$\lambda^n + \lambda^{-n} = 2\cos(n\alpha), \quad \lambda + \lambda^{-1} = 2\cos\alpha,$$

so erhält man den Ausdruck (3), wenn man $\lambda^n + \lambda^{-n}$ nach Potenzen von $\lambda + \lambda^{-1}$ entwickelt. So hat man

$$\lambda^2 + \lambda^{-2} = (\lambda + \lambda^{-1})^2 - 2,$$
$$\lambda^3 + \lambda^{-3} = (\lambda + \lambda^{-1})^3 - 3(\lambda + \lambda^{-1}),$$
$$\lambda^4 + \lambda^{-4} = (\lambda + \lambda^{-1})^4 - 4(\lambda + \lambda^{-1})^2 + 2,$$
$$\lambda^5 + \lambda^{-5} = (\lambda + \lambda^{-1})^5 - 5(\lambda + \lambda^{-1})^3 + 5(\lambda + \lambda^{-1}),$$
$$\lambda^6 + \lambda^{-6} = (\lambda + \lambda^{-1})^6 - 6(\lambda + \lambda^{-1})^4 + 9(\lambda + \lambda^{-1})^2 - 2,$$
$$\lambda^7 + \lambda^{-7} = (\lambda + \lambda^{-1})^7 - 7(\lambda + \lambda^{-1})^5 + 14(\lambda + \lambda^{-1})^3 - 7(\lambda + \lambda^{-1}).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1,$$
$$\cos(5\alpha) = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$
$$\cos(6\alpha) = 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos(7\alpha) = 64\cos^7\alpha - 112\cos^5\alpha + 56\cos^3\alpha - 7\cos\alpha.$$

Ersetzt man λ durch λi, so wird aus

$$(4) \quad \lambda^n + \lambda^{-n} = (\lambda + \lambda^{-1})^n + a_1(\lambda + \lambda^{-1})^{n-2} + a_2(\lambda + \lambda^{-1})^{n-4} + \cdots + a_h(\lambda + \lambda^{-1})^{n-2h} + \cdots$$

gefunden:

$$(5) \quad \lambda^n + (-1)^n\lambda^{-n} = (\lambda - \lambda^{-1})^n - a_1(\lambda - \lambda^{-1})^{n-2} + a_2(\lambda - \lambda^{-1})^{n-4} + \cdots.$$

Hieraus folgt, daß (4) die Quelle aller hier zu betrachtenden Gleichungen ist (vgl. S. 74). Multipliziert man (4) mit $\lambda + \lambda^{-1}$, so kann man die Richtigkeit der Koeffizientenbestimmung bestätigen. Denn links erhält man $\lambda^{n+1} + \lambda^{-n-1} + \lambda^{n-1} + \lambda^{-n+1}$. Setzt man nun die für $a_1, a_2, \ldots$ sich für $n + 1$ und $n - 1$ ergebenden Werte ein, so folgt eine Selbstgleichung. Die Werte der Koeffizienten sind:

$$a_1 = -n, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}n(n-3), \quad a_3 = -\tfrac{1}{6}n(n-4)(n-5),$$
$$a_h = (-1)^h \frac{n(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\cdots(n-2h+1)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots h}.$$

Schreibt man die a_h in der Form $a_h(n)$, um ihre Abhängigkeit von n auszudrücken und die Bestätigungsgleichungen zu bilden, so ist

$$a_1(n+1) + 1 = a_1(n); \quad a_2(n+1) + a_1(n-1) = a_2(n),$$
$$a_3(n+1) + a_2(n-1) = a_3(n) \quad \text{usw.}$$

Für die Tangensfunktion erhalten wir zunächst das Additionstheorem (vgl. S. 114):

$$(6) \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Entsprechend ist

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}.$$

Beide Additionstheoreme sind nicht ganze, sondern nur rationale Ausdrücke. Aber sie enthalten lediglich die Funktion selbst und sind aus diesem Grunde einfacher als die entsprechenden für Sinus und Kosinus. Man findet

$$\operatorname{tg}(90-\alpha) = \cot\alpha, \quad \cot(90-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$

(7) $$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Früher fanden wir (2)

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}, \quad \sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich:

(8) $$\cos(2\alpha) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \sin(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ist $\operatorname{tg}\alpha$ eine rationale Zahl $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, so ergibt sich

$$\cos(2\alpha) = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}, \quad \sin(2\alpha) = \frac{2ab}{b^2+a^2}.$$

Die Verdopplung eines Winkels mit rationaler Tangens liefert eine ganzzahlige Lösung der Gleichung (vgl. S. 166, 251):

$$x^2+y^2=z^2.$$

Dies folgt aus (8), wenn man quadriert und addiert. Es ist

$$\operatorname{tg}x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{i(e^{xi}+e^{-xi})}.$$

Setzt man $e^{xi}=\lambda$, so ist

(9) $$\begin{cases} 2\cos x = \lambda + \lambda^{-1}, \quad 2i\sin x = \lambda - \lambda^{-1}, \\ i\operatorname{tg}x = \dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}. \end{cases}$$

λ, $\sin x$, $\cos x$ haben die Periode 2π, λ^2 und folglich auch $\operatorname{tg}x$ die Periode π. Dies zeigt auch die Gleichung

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}x.$$

Aus (9) folgt

(10) $$\begin{cases} \lambda = \cos x + i\sin x = e^{xi} \\ \lambda^2 = \dfrac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}. \end{cases}$$

Nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so folgt

$$(11)\qquad \begin{cases} xi = l(\cos x + i \sin x), \\ 2xi = l(1 + i \operatorname{tg} x) - l(1 - i \operatorname{tg} x). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln werden (vgl. S. 114) Reihen für π abgeleitet.

Das Multiplikationstheorem der Tangensfunktion ist sehr einfach. Aus dem Moivreschen Satze folgt:

$$2\cos(n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n,$$
$$2i\sin(n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n.$$

Daraus folgt, wenn man dividiert und dann Zähler und Nenner durch $\cos^n\alpha$ kürzt:

$$(12)\qquad 2i\operatorname{tg}(n\alpha) = \frac{(1 + i\operatorname{tg}\alpha)^n - (1 - i\operatorname{tg}\alpha)^n}{(1 + i\operatorname{tg}\alpha)^n + (1 - i\operatorname{tg}\alpha)^n}.$$

Die Entwicklung geschieht nach dem Binomischen Lehrsatz. Es ist beispielsweise

$$(13)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(3\alpha) = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}, \\[2ex] \operatorname{tg}(4\alpha) = \dfrac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}. \end{cases}$$

§ 6. Formeln für Addition der trigonometrischen Funktionen. Berechnung von π.

Aus dem Additions- und Subtraktionsgesetz folgt:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta.$$

Ersetzt man nun α durch $\frac{\alpha+\beta}{2}$, β durch $\frac{\alpha-\beta}{2}$, so findet man

$$(14)\qquad \begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \\[2ex] \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \\[2ex] \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \\[2ex] \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}. \end{cases}$$

Geometrische Anwendung hat auch folgende Formel:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

oder

(15) $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Man kann auch sin und cos addieren. Es ist

$$\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin(90^0-\beta)$$
$$=2\sin\left(45^0+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^0\right),$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin 45^0\cdot\cos(\alpha-45^0)=2\sin 45^0\cdot\cos(45^0-\alpha).$$

Folgende Formeln sind ebenfalls für geometrische Anwendung wichtig.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta},$$

(16) $$\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \text{ebenso:}\\ \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.\end{cases}$$

Aus

$$-\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ergibt sich

(17) $$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma.$$

Sie ist erfüllt, wenn

$$\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=0,$$

also für

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{oder} \quad \alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Aus

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

oder

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ergibt sich:

$$\cos^2\gamma+\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta),$$

also:

(18) $$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0.$$

Die Formel gilt, wenn

$$\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)$$

oder

$$\cos\gamma = \cos(\alpha - \beta),$$

also

$$\gamma = \alpha + \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 360^0.$$

Aus

$$-\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

oder

$$-\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

folgt

(19) $$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0$$

für

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Die trigonometrischen Funktionen können umgekehrt werden. Umkehrung einer Funktion $F(x)$ ist $\varphi(x)$, wenn $\varphi(F(x)) = x$ ist. Die Umkehrung der Sinusfunktion ist arc sin x, gesprochen arcus sinus mit dem Sinn: derjenige Bogen, dessen Sinus x ist. So ist

$$\text{arc sin } 0 = 0, \quad \text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arc sin } 0 = \pi, \quad \text{arc sin } 0 = 2\pi.$$

Der arc sin hat für ein beliebiges Argument unzählig viel Werte, die sich um Vielfache von 2π unterscheiden. Allgemein ist

(20) $$\text{arc sin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) = \text{arc sin } x + \text{arc sin } y.$$

In Worten: Der Bogen, dessen Sinus x ist, vermehrt um den Bogen, dessen Sinus y ist, gibt den Bogen, dessen Sinus $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ ist. Das ist eine Umredung des Additionstheorems des Sinus.

Für die Anwendung auf die Berechnung von π ist die arc tg-Funktion die wichtigste. Wir verweisen dieserhalb auf die Entwicklungen des § 24, S. 114—115 der Arithmetik. Folgende Darlegungen sollen die dort gegebenen Sätze ergänzen.

Seien a und b reelle Zahlen und

$$a + bi = \varrho(\cos x + i\sin x) = \varrho e^{xi}.$$

Dann ist durch Übergang zu den Logarithmen

$$l(a + bi) = l\varrho + xi$$

oder

$$l(a + bi) = l\varrho + i \text{ arc tg } \frac{b}{a}\cdot$$

ϱ ist der absolute Betrag von $a + bi$ und $\text{tg } x = \frac{b}{a}\cdot$

Nun sei

(21) $$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)\ldots(a_n + b_n i) = A + Bi.$$

Bei der Logarithmierung erscheint als reeller Teil links und rechts der Logarithmus des absoluten Betrags des Produkts. Der imaginäre Teil liefert die Gleichung:

$$(22)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{b_1}{a_1}+\operatorname{arc\,tg}\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n}=\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A}.$$

Die arithmetische Gleichung (21) ist völlig gleichwertig mit der transzendenten (22). Sie entsprechen einander wie $2\cdot 3=6$ und $l2+l3=l6$. Ja, (22) ist für komplexe Zahlen genau dieselbe Beziehung wie sie die Addition der Logarithmen für reelle Werte herstellt. Beispielsweise ist

$$(13+i)(17+i)(7-i)=10(157-i)$$

und

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{17}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{157}=0.$$

Aus unseren früheren Entwicklungen [S. 114, Gl. (11)] ergibt sich

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{p^7}+\cdots.$$

Sobald p einigermaßen groß ist, wird diese Entwicklung stark konvergent. Nehmen wir nun an, es sei statt (21) gegeben:

$$(23)\qquad (p_1+i)(p_2+i)\ldots(p_n+i)=K(1+i),$$

so folgt:

$$(24)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p_1}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p_2}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p_n}=\frac{\pi}{4}.$$

Wir behaupten nun, daß (23) auf unzählig viel Arten derartig gebildet werden kann, daß die p ganze Zahlen sind. Jede solche Lösung liefert in (24) eine zur Berechnung von π geeignete Reihenzusammenstellung. Geometrisch sagt obige Behauptung aus, es sei auf unendlich viel Arten möglich, den Winkel $\frac{\pi}{4}$, also 45^0 in eine Summe von Winkeln zu zerlegen, deren trigonometrische Tangenten Brüche mit dem Zähler Eins und ganzzahligem Nenner sind.

Zum Beweise gehen wir von einer willkürlichen komplexen Zahl $a+bi$ aus. a und b sind positive ganze Zahlen und $a>b$. Es ist

$$(a+bi)(a+b+(a-b)i)=(a^2+b^2)(1+i).$$

Wäre nun zufällig $a-b=1$ oder $a-b$ ein genauer Teiler von $a+b$, etwa $a+b=m(a-b)$, so wäre

$$(a+bi)(m+i)(a-b)=(a^2+b^2)(1+i).$$

Es wäre also $a+bi$ durch Multiplikation mit einer Zahl $m+i$ in die verlangte Form $K(1+i)$ gesetzt. Auf den reellen Faktor $a-b$

kommt nichts an, wie (22) zeigt. Sei $a - b$ nicht 1 und kein Teiler von $a + b$. Dann bilden wir

$$(a + bi)(p + i) = ap - b + (bp + a)i.$$

Die Differenz der reellen und der mit i multiplizierten Zahl ist

$$(a - b)p - a - b.$$

Da $a - b$ kein Teiler von $a + b$ ist, so können wir bei passender Wahl von p bewirken, daß

$$0 < (a - b)p - a - b < a - b$$

wird. Folglich ist $(a + bi)(p + i) = a' + b'i$ eine Zahl wie $a + bi$, aber die Differenz zwischen dem reellen Teil und der mit i multiplizierten Zahl $a' - b'$ ist kleiner geworden. Ist diese Differenz 1 oder ist sie ein genauer Teiler der Summe $a' + b'$, so ist das Verfahren beendet. Ist keins von beiden der Fall, so bilden wir $(a' + b'i)(p' + i)$, bis einer der obigen Fälle eintritt. Dies geschieht spätestens nach $a - b$ Versuchen. Um eine passende Ausgangszahl $a + bi$ zu erhalten, nehmen wir irgend eine positive Zahl c, bilden

$$c + i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und erheben $c + i$ der Reihe nach in die Potenzen 2, 3, 4, ..., dann wird eine Potenz n gefunden werden, für welche ist

$$n\varphi < 45^0 < (n + 1)\varphi.$$

Setzen wir nun $a + bi = (c + i)^n$, so sind a und b positiv, es ist $a > b$ und $a + bi$ ist eine passende Ausgangszahl.

Beispiele:

1) $(2 + i)(3 + i) = 5(1 + i)$,

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

2) $(3 + i)^2(7 + i) = 50(1 + i)$,

$$2\,\text{arc tg}\,\frac{1}{3} + \text{arc tg}\,\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

3) $(4 + i)^3(20 + i)(1995 + i) = 1980043(1 + i)$,

$$3\,\text{arc tg}\,\frac{1}{4} + \text{arc tg}\,\frac{1}{20} + \text{arc tg}\,\frac{1}{1995} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

4) $(5 + i)^4(239 - i) = 4\cdot(119^2 + 120^2)(1 + i)$,

$$4\,\text{arc tg}\,\frac{1}{5} - \text{arc tg}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

5) $(6 + i)^4(8 + i)(2230 + i) = 17404039 + 17404038i$,

$(6 + i)^4(8 + i)(2230 + i)(34808077 + i) = K(1 + i)$.

Die Berechnung von K ist unnötig.

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2230} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{34808077} = \frac{\pi}{4}.$$

Andere Formeln ergeben sich aus

$$(n+i)(n+1-i) = n^2+n+1+i,$$

nämlich

(25) $$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1},$$

und aus

$$(2n+i)^2(n-i) = 4n^3+3n+i$$

(26) $$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4n^3+3n}.$$

So ist

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{515}$$

und aus

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

folgt die schöne Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{515} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Hiermit können wir unsere Erörterungen schließen.

Folgende geometrische Ergebnisse sind festgestellt:

1. Der Winkel von 45^0 ist auf unzählig viel Arten in eine Summe von Winkeln zerlegbar, deren Gegenkathete 1 und deren Nebenkathete eine ganze Zahl ist. Das einfachste Beispiel ist dasjenige mit den Nebenkatheten 2 und 3.

2. Jeder Winkel dieser Art ist zerlegbar in eine Summe kleinerer Winkel derselben Art.

3. Denkt man sich die Winkel als Zentriwinkel eines Kreises, nimmt den Radius als Nebenkathete, so wird die Gegenkathete $\frac{1}{n}$, wo n eine ganze Zahl ist. Dann kann man den Kreis als Grenzwert einer Summe von rechtwinkligen Dreiecken mit dem Inhalt $\frac{1}{2}\frac{1}{n}$ darstellen. Es ist nicht schwer, hieraus Näherungswerte für π zu berechnen.

Es ist unmöglich, den Winkel von 60^0 in ähnlicher Weise zu zerlegen. Denn eine solche Zerlegung würde, da $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$ ist, zu der Gleichung führen:

$$(p_1+i)(p_2+i)\ldots(p_n+i) = K(\sqrt{3}+i)$$

wo $p_1, p_2, \ldots, K$ ganze Zahlen wären. Dasselbe gilt von allen andern Winkeln mit irrationaler Tangensfunktion. Dagegen sind andere Zerlegungen möglich, von denen wir zwei Beispiele geben wollen:

$$(2\sqrt{3}+i)^2(15\sqrt{3}-i) = 169(\sqrt{3}+i),$$

also

$$\frac{\pi}{6} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{15\sqrt{3}}.$$

$$(3\sqrt{3}+i)^2(4\sqrt{3}+i) = 49(\sqrt{3}+i),$$

$$\frac{\pi}{6} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Zweiter Abschnitt: **Dreiecksberechnung.**

§ 7. Erste Methode.

Trigonometrie im engeren Sinne ist diejenige Wissenschaft, welche sich damit beschäftigt, durch Anwendung der Goniometrie die Berechnung geometrischer Gebilde zu leisten. Sie heißt Dreiecksberechnung, weil jedes Vieleck in Dreiecke zerlegbar ist, obschon auch der Name Polygonometrie vorkommt und unschwer verständlich ist.

Die Aufgaben der Dreiecksberechnung sind die gleichen wie die der Zeichnung des Dreiecks: 3 Seiten, 0 Winkel; 2 Seiten, 1 Winkel; 1 Seite, 2 Winkel bilden den logischen Rahmen. Geometrische Erwägungen schließen den logisch möglichen Fall 0 Seiten, 3 Winkel aus und zeigen, daß der zweite Fall zu zwei verschiedenen Aufgaben führt, je nachdem die gegebenen Seiten den gegebenen Winkel einschließen oder nicht. In logischer Abfolge gliedern sich also die Dreiecksgrundaufgaben wie folgt. Gegeben ist:

1) a, b, c; 2) a, b, γ; 3) a, b, α; 4) a, γ, β.

Geometrische und unterrichtliche Gründe sprechen für eine andere, die seit Euklid übliche Reihenfolge:

1) a, b, γ; 2) a, β, γ; 3) a, b, c; 4) a, b, α.

Erste Methode der Dreiecksberechnung. Wir nennen (Fig. 130) die Projektion der Seite AB auf BC, nämlich $BD = x$, dann ist $DC = a - x$, folglich

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

und aus $\cos\beta = \frac{x}{c}$

(1) $$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Dieser Satz heißt **Kosinussatz**. Er erscheint in drei Formen, welche durch zyklische Vertauschung gefunden werden:

(2) $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

In der hier gegebenen Form löst er die Aufgabe, ein Dreieck zu bestimmen, wenn die drei Seiten gegeben sind. Sind die Seiten durch kleine Zahlwerte gegeben, so ist die gefundene Lösung auch praktisch durchaus vorteilhaft. Sei z. B. $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, so ist

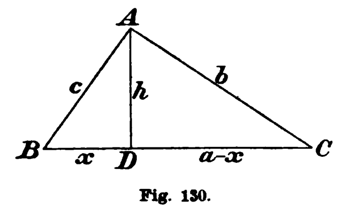


Fig. 130.

$$\cos\alpha = \frac{5}{7}, \quad \cos\beta = \frac{19}{35},$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{5}.$$

Folgende drei Bemerkungen sind zu machen:

1. Obige Ableitung setzt den Pythagoras voraus. Das ist nicht nötig. Denn man kann folgende Gleichungen aus der Figur ablesen:

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma; \quad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha; \quad c = b\cos\alpha + a\cos\beta.$$

Behandelt man sie als ein Gefüge von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so erhält man die Lösungen (2). Durch die Hinzunahme von $\cos 90^0 = 0$ ergibt sich also aus dieser Lösung ein Beweis für den Pythagoras.

2. Aus Figur 131 ergibt sich

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a + x)^2, \quad x = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a},$$

(3) $$\cos(180^0 - \beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}.$$

Nun ist aber (S. 278) $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$, folglich ergibt sich

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

auch für das stumpfwinklige Dreieck als gültig. Dies setzt voraus, daß man die Beziehung $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$ schon kennt. Im Unterricht verfährt man am besten umgekehrt. Man geht von bestimmten stumpfwinkligen Dreiecken aus, zeigt an ihnen die Richtigkeit der Gleichung (3) und weist auf die Tatsache hin, daß Gl. (1)

die Eigenschaft ausnahmsloser Gültigkeit für alle Dreiecke erlangt, wenn $-\cos\alpha = \cos(180^0 - \alpha)$ als Erklärung für den Kosinus eines stumpfen Winkels angenommen wird. Die Gleichung $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$ erscheint dann als zweckmäßige Festsetzung. Leicht begründet man aus (3), daß sie nicht nur zweckmäßig, sondern allein

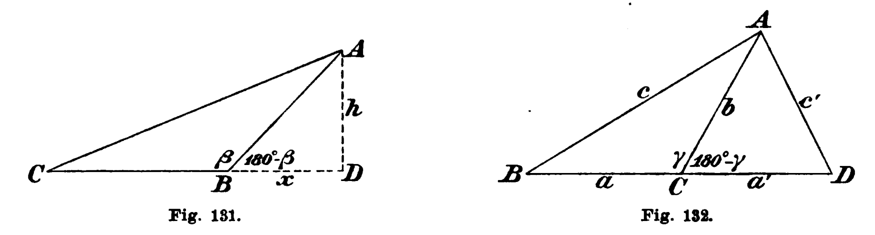


Fig. 131. Fig. 132.

zulässig ist, wenn man überhaupt dem Begriffe: „Kosinus eines stumpfen Winkels“ eine Deutung geben will. Allerdings besteht die Möglichkeit, eine Trigonometrie auszubauen, in welcher die Funktionen stumpfer Winkel nicht vorkommen. Sie vermag alle Aufgaben zu lösen.

3. Man kann $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ als Erklärung des Kosinus aufstellen. Ist dann $\beta = 90^0$, so folgt aus Pythagoras $b^2 = a^2 + c^2$, also $\cos\alpha = \frac{c}{b}$, womit wir auf die frühere Erklärung zurückkommen: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kosinus Quotient der Nebenkathete durch die Hypotenuse. Die Erklärung bewährt sich auch für stumpfe Winkel und zwar durchaus ungezwungen. Sie führt sofort zu einer einwandfreien Erklärung des Kosinus eines stumpfen Winkels. Es ist (Fig. 132):

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \cos(180 - \gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c'^2}{2ab}.$$

Nach dem Mittelliniensatz (S. 252), den wir hier mit Hülfe des Pythagoras als bewiesen ansehen, ist

$$2c^2 + 2c'^2 = 4a^2 + 4b^2,$$

also

$$a^2 + b^2 - c'^2 = -a^2 - b^2 + c^2,$$

also

$$-\cos\gamma = \cos(180 - \gamma).$$

Gegen dies Verfahren läßt sich nur der Vorwurf erheben, daß es zu künstlich scheint und darum unzweckmäßig ist. Ein sachliches Bedenken liegt sonst nicht vor.

Aus den Gleichungen (2) folgt:

$$(4) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

In dieser Form bietet der Kosinussatz die Lösung der Aufgabe, ein Dreieck zu bestimmen, von welchem man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt (b, c, α). Ist α stumpf, so haben wir die Berechnungsformel

$$(5) \qquad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(180^0 - \alpha).$$

Die Formeln (4) und (5) sind für wirkliche Rechnung unbequem, weil die unmittelbare Anwendung der Logarithmen nicht möglich ist.

Aus (4) folgt durch Auflösung nach b:

$$b = c \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 + c^2 \cdot \cos^2\alpha},$$

$$(6) \qquad b = c \cdot \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2\alpha}.$$

Diese Formel ist einer einfachen geometrischen Deutung fähig. Es ist (Fig. 133):

$$BE = c \sin\alpha, \quad AE = c\cos\alpha, \quad CE = \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha}.$$

Hiermit haben wir einen neuen Weg zur Ableitung der Formel (4) gefunden, zugleich aber auch eine Lösung der Aufgabe: Ein Dreieck zu berechnen, wenn zwei Seiten und ein Gegenwinkel gegeben sind. Ist $a < c \sin\alpha$, so ist die Aufgabe unlösbar; ist $a^2 - c^2 \sin^2\alpha < c^2\cos^2\alpha$, also $a^2 < c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$ oder $a^2 < c^2$, $a < c$, aber $a \gtreqless c \sin\alpha$, so erhält man zwei positive Lösungen für b. Ist $a \gtreqless c$, so erhält man nur eine wirkliche Lösung.

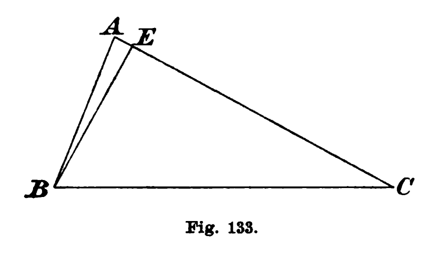


Fig. 133.

Durch die vorgetragene Lösung sind also drei Grundaufgaben, nämlich die 1., 3., 4. erledigt. Die 2. Aufgabe fehlt. Sie würde nur künstlich mit Hülfe des Kosinussatzes zur Lösung geführt werden können.

§ 8. Zweite Methode der Dreiecksberechnung.

Wir gehen von der Heronischen Formel aus. Wenn man (Fig. 130) $h^2 = c^2 - x^2 = (c - x)(c + x)$ ausführt, dann die beiden Ausdrücke $c - x$ und $c + x$ bildet, so folgt

$$c - x = \frac{(b - a + c)(b + a - c)}{2a}, \quad c + x = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2a},$$

also

$$4a^2h^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

Setzt man nun

$$2\sigma = a + b + c, \quad \text{also} \quad 2(\sigma - a) = -a + b + c \text{ usw.},$$

so wird $I = \frac{ah}{2}$, also

(7) $$I^2 = \sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c).$$

Dies ist (vgl. S. 250) die Heronische Formel. Nun ist (Fig. 130)

$$h = c \sin \beta, \quad \text{also} \quad ah = ac \sin \beta,$$

(8) $$I = \tfrac{1}{2} ac \sin \beta.$$

In derselben Weise schließt man:

(9) $$I = \tfrac{1}{2} ba \sin \gamma = \tfrac{1}{2} cb \sin \alpha.$$

Die Formeln gelten sofort für stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke, wenn man die Gleichung $\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha$ voraussetzt; oder anders ausgedrückt: wenn man die Entwicklung für das stumpfwinklige Dreieck (Fig. 131) durchführt, so erhält man die Formel

(10) $$I = \tfrac{1}{2} ac \sin(180^0 - \beta).$$

Setzt man die Gleichung $\sin(180^0 - \beta) = \sin \beta$ nicht voraus, so kann man Gl. (10) zur Erklärung des Sinus eines stumpfen Winkels benutzen. Sie muß dann lauten $\sin(180^0 - \beta) = \sin \beta$.

Aus den Gleichungen (9) folgt:

(11) $$\sin \alpha = \frac{2I}{bc}, \quad \sin \beta = \frac{2I}{ca}, \quad \sin \gamma = \frac{2I}{ab}.$$

Diese Formeln geben eine zweite Lösung der dritten Grundaufgabe. Sie ist für unmittelbare Anwendung der Logarithmen geeignet. Es sind im ganzen sieben Logarithmen aufzuschlagen (σ, $\sigma - a$, $\sigma - b$, $\sigma - c$, a, b, c). Die Lösung ist daher weit besser als die erste [Formel (2)] durch den Kosinussatz. Ob ein stumpfer Winkel vorliegt, erkennt man aus der Summenprobe $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Der stumpfe Winkel muß der größten Dreiecksseite gegenüberliegen und ist daher sofort im Ergebnis erkennbar. Für Schüler sind diese Überlegungen nützlich und bewahren vor gedankenloser Rechnerei.

Aus (9) ergibt sich:

(12) $$a \sin \gamma = c \sin \alpha$$

und ebenso

(13) $$b \sin \alpha = a \sin \beta, \quad c \sin \beta = b \sin \gamma.$$

Ferner

(14) $$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Die Formeln (12), (13) und ebenso (14) enthalten den Sinussatz. Beide Gleichungen haben geometrischen Sinn. In (12) ist (Fig. 133)

die Höhe BE doppelt ausgedrückt, in (14) ist der Durchmesser des Umkreises (vgl. S. 247) dreifach dargestellt (Fig. 134):

$$\frac{a}{2} = r \sin \alpha.$$

Die Formeln (13) lösen die zweite Grundaufgabe (a, β, γ), zugleich aber auch die vierte (a, c, α). Ist $a \gtreqqless c$, so ist die Lösung dieser Aufgabe eindeutig; denn

$$\sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a}$$

liefert nur einen Wert $\gamma \lesseqgtr \alpha$. Ist $a < c$, so ist entweder $c \sin \alpha > a$, dann ist $\sin \gamma > 1$, also die Aufgabe unlösbar oder es ist $c \sin \alpha < a$; dann erhält man für γ zwei brauchbare Winkel, die man γ und $180^0 - \gamma$ nennen kann. Für $c \sin \alpha = a$ erhält man nur eine brauchbare Lösung $\gamma = 90^0$.

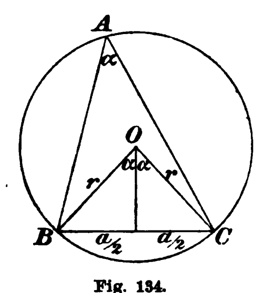


Fig. 134.

Die zweite Berechnungsmethode liefert schöne und in gewisser Hinsicht vollendete Lösungen für die zweite, dritte, vierte Grundaufgabe. Für die erste würde man zuerst I berechnen aus

$$2I = bc \sin \alpha$$

und dann aus

$$16 I^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

eine Lösung für a ableiten können. Diese Lösung befriedigt noch weniger als die vorige. Für die erste Grundaufgabe ist eine vollendete Lösung also noch zu geben. Es ist

$$(15) \qquad \begin{cases} \cos \alpha + i \sin \alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2 + 4iI}{2bc} = e^{\alpha i}; \\ a^2 = (b - ce^{\alpha i})(b - ce^{-\alpha i}). \end{cases}$$

§ 9. Die erste Dreiecksgrundaufgabe.

Wie die bisherigen Untersuchungen gezeigt haben, nimmt die Aufgabe b, c, α „zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel" eine Sonderstellung ein. Auf die bis jetzt gefundenen Lösungen ist logarithmische Rechnung nicht unmittelbar anzuwenden. Folgende Lösung entnehmen wir Fig. 133:

$$AE = c \cdot \cos \alpha, \quad CE = b - c \cdot \cos \alpha, \quad BE = c \cdot \sin \alpha,$$

$$(16) \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha}.$$

Auch diese Lösung gestattet nicht unmittelbar die Anwendung der Logarithmen. Durch die Einführung des Hülfswinkels φ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c\sin\alpha}{b}$$

kann man (16) umformen und erhält

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)};$$

daraus ferner

$$a = \frac{b\operatorname{tg}\varphi}{\sin\gamma}.$$

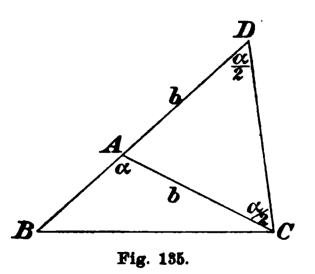


Fig. 135.

Allein die Lösung ist künstlich. Eine natürliche Lösung bietet der sogenannte Tangenssatz. Es ist

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Daraus folgt:

$$b + c = \frac{a}{\sin\alpha}(\sin\beta + \sin\gamma) = \frac{2a}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Nun ist

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0, \quad \text{also} \quad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2},$$

also

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ersetzen wir ferner $\sin\alpha$ durch seinen Wert aus (10), S. 272, so ist

$$(17) \qquad b + c = \frac{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Diese oft gebrauchte Formel kann man auch geometrisch ableiten. Wir wenden (Fig. 135) den Sinussatz auf das Dreieck DBC an, in welchem

$$DB = b + c$$

und

$$\sphericalangle DCB = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Durch ähnliche Schlüsse ergibt sich:

$$b - c = \frac{a}{\sin\alpha}(\sin\beta - \sin\gamma) = \frac{2a}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

oder weil

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

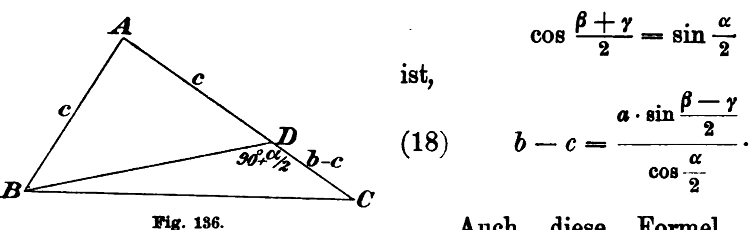


Fig. 136.

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

ist,

(18) $$b - c = \frac{a\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Auch diese Formel ist geometrisch herzuleiten. Wir wenden (Fig. 136) den Sinussatz auf $\triangle DBC$ an, in welchem $DC = b - c$, $\sphericalangle BDC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle DBC = \beta - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \beta - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$ ist. Die Formeln (17) und (18) heißen die Mollweideschen. Dividiert man (17) durch (18), so folgt:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Nun ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2},$$

also

(19) $$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Diese Formel heißt der Tangenssatz. Er ist in seinem Bau durchaus symmetrisch und prägt sich dem Gedächtnis leicht ein. $b - c$ wird mit $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$ zugleich negativ. Darum ist auch

$$\frac{c+b}{c-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2}}.$$

Die Formel kann durch Vereinigung der Figuren 135 und 136 geometrisch abgeleitet werden.

Der Tangenssatz löst von den vier Grundaufgaben nur die erste b, c, α und ist die klassische Lösung dieser Aufgabe. Durch Bestimmung von $\beta - \gamma$ und $\beta + \gamma = 180 - \alpha$ werden alle drei Winkel bekannt; doch liefert die Addition eine wertlose Probe. Aus den Winkeln gewinnt man die dritte Seite durch den Sinussatz:

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

§ 10. Zahlenbeispiele mit Rechnungsproben.

1. Erste Grundaufgabe.

$$b = 394{,}27;\quad c = 582{,}19;\quad \alpha = 73^\circ 21' 42'',0.$$

$$b + c = 976{,}46;\quad c - b = 187{,}92;\quad \frac{\beta+\gamma}{2} = 53^\circ 19' 9'',0.$$

$$\left.\begin{array}{rl} \log(c-b) = & 2{,}273\,9730 \\ \log \operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2} = & 10{,}127\,9272 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{rl} & 2{,}401\,9002 \\ \log(c+b) = & 2{,}989\,6545 \end{array}\right\} -$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2} = 9{,}412\,2457$$

$$\frac{\gamma-\beta}{2} = 14^\circ 29' 12'',54$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\gamma+\beta}{2} = 53^\circ 19' 9'',0 \\ \frac{\gamma-\beta}{2} = 14^\circ 29' 12'',54 \end{array}\right\} \pm$$

$$\gamma = 67^\circ 48' 21'',54$$
$$\beta = 38^\circ 49' 56'',46$$

$$\left.\begin{array}{rl} \log b = & 2{,}595\,7937 \\ \log \sin\alpha = & 9{,}981\,4250 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{rl} = & 2{,}577\,2187 \\ \log \sin\beta = & 9{,}797\,2978 \end{array}\right\} -$$

$$\log a = 2{,}779\,9209$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 2{,}765\,0647 \\ \log \sin\alpha = & 9{,}981\,4250 \\ \hline & 2{,}746\,4897 \\ \log \sin\gamma = & 9{,}966\,5688 \\ \hline & 2{,}779\,9209 \end{array}$$

$$a = 602{,}4500,\quad \alpha = 73^\circ 21' 42'',00,$$
$$b = 394{,}2700,\quad \beta = 38^\circ 49' 56'',46,$$
$$c = 582{,}1900,\quad \gamma = 67^\circ 48' 21'',54.$$

Die Probe

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

ist angestellt.

$$\left.\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}779\,9209 \\ \log \sin\alpha = & 9{,}981\,4250 \end{array}\right\} -$$

$$\log(2r) = 2{,}798\,4959$$

$$\begin{array}{rl} \log b = & 2{,}595\,7937 \\ \log \sin\beta = & 9{,}797\,2978 \\ \hline & 2{,}798\,4959 \end{array}$$

$$2r = 628{,}7760;\quad r = 314{,}3880.$$

$$\left.\begin{array}{rl} \log b = & 2{,}595\,7937 \\ \log c = & 2{,}765\,0647 \\ \log \sin\alpha = & 9{,}981\,4250 \end{array}\right\} +$$

$$\log(2I) = 5{,}342\,2834$$

$$\left.\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}779\,9209 \\ \log b = & 2{,}595\,7937 \\ \log \sin\gamma = & 9{,}966\,5688 \end{array}\right\} +$$

$$5{,}342\,2834$$

$$2I = 219929{,}4;\quad I = 109964{,}7.$$

Dieser Wert soll auch mit Hülfe der Heronischen Formel berechnet werden:

$$\begin{array}{rl} a = 602{,}45 & \sigma - a = 187{,}005 \\ b = 394{,}27 & \sigma - b = 395{,}185 \\ c = 582{,}19 & \sigma - c = 207{,}265 \\ \hline 1578{,}91 & \sigma = 789{,}455 \\ \sigma = 789{,}455 & \end{array} \quad \left.\right\} +$$

$$\begin{array}{rl} \log \sigma &= 2{,}897\,3273 \\ \log (\sigma - a) &= 2{,}271\,8532 \\ \log (\sigma - b) &= 2{,}596\,8005 \\ \log (\sigma - c) &= 2{,}316\,5259 \\ \hline & 10{,}082\,5069 : 2 \\ \log I &= 5{,}041\,2534 \\ \log 2 &= 0{,}301\,0300 \\ \hline \log (2I) &= 5{,}342\,2834. \end{array}$$

Die Probe stimmt.

2. Zweite Grundaufgabe.

$$a = 794{,}28; \quad \beta = 51^0\,57'\,48'',00; \quad \gamma = 63^0\,37'\,54'',00.$$

Demnach

$$\alpha = 64^0\,24'\,18''.$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$\begin{array}{rl} \log a &= 2{,}899\,9736 \\ \log \sin \beta &= 9{,}896\,3149 \\ \hline & 2{,}796\,2885 \\ \log \sin \alpha &= 9{,}955\,1441 \\ \hline \log b &= 2{,}841\,1444 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a &= 2{,}899\,9736 \\ \log \sin \gamma &= 9{,}952\,2874 \\ \hline & 2{,}852\,2610 \\ \log \sin \alpha &= 9{,}955\,1441 \\ \hline \log c &= 2{,}897\,1169 \end{array}$$

$$b = 693{,}6563, \quad c = 789{,}0726.$$

Ergebnis:

$$\begin{array}{ll} a = 794{,}2800; & \alpha = 64^0\,24'\,18'',00; \\ b = 693{,}6563; & \beta = 51^0\,57'\,48'',00; \\ c = 789{,}0726; & \gamma = 63^0\,37'\,54'',00. \end{array}$$

Die Probe $c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$ ist fast wertlos; noch geringer ist die Addition der Winkel als Probe. Da die Seiten einander in ihren Werten nahekommen, ist die Probe durch den Tangenssatz bei den

großen Differenzwerten nicht unbedenklich. Am besten ist die Probe durch die Inhaltsformel.

$$\begin{array}{rl}
\log a = & 2{,}899\,9736 \\
\log b = & 2{,}841\,1444 \\
\log \sin \gamma = & 9{,}952\,2874 \\
\hline
\log (2I) = & 5{,}693\,4054 \\
 & 0{,}301\,0300 \\
\hline
\log I = & 5{,}392\,3754
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\sigma = & 1138{,}5044 \\
\sigma - a = & 344{,}2244 \\
\sigma - b = & 444{,}8481 \\
\sigma - c = & 349{,}4318 \\
\log \sigma = & 3{,}056\,3345 \\
\log (\sigma - a) = & 2{,}536\,8416 \\
\log (\sigma - b) = & 2{,}648\,2117 \\
\log (\sigma - c) = & 2{,}543\,3624 \\
\hline
 & 10{,}784\,7502 : 2 \\
\log I = & 5{,}392\,3751
\end{array}$$

3. Dritte Grundaufgabe.

$$\begin{array}{rl}
a = & 77{,}94 \\
b = & 165{,}91 \\
c = & 100{,}00 \\
\hline
 & 343{,}85
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\sigma = & 171{,}925 \\
\sigma - a = & 93{,}985 \\
\sigma - b = & 6{,}015 \\
\sigma - c = & 71{,}925 \\
\log I = & 3{,}422\,2565
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log \sigma = & 2{,}235\,3390 \\
\log (\sigma - a) = & 1{,}973\,0585 \\
\log (\sigma - b) = & 0{,}779\,2356 \\
\log (\sigma - c) = & 1{,}856\,8799 \\
\hline
 & 6{,}844\,5130 : 2.
\end{array}
\left.\right\} +$$

$$\sin \alpha = \frac{2Ia}{abc}, \quad \sin \beta = \frac{2Ib}{abc}, \quad \sin \gamma = \frac{2Ic}{abc}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log a = & 1{,}891\,7604 \\
\log b = & 2{,}219\,8726 \\
\log c = & 2{,}000\,0000 \\
\hline
\log p = & 6{,}111\,6330
\end{array} \; (+)
\qquad
\begin{array}{rl}
\log I = & 3{,}422\,2565 \\
\log a = & 1{,}891\,7604 \\
\log 2 = & 0{,}301\,0300 \\
\hline
 & 5{,}615\,0469 \\
\log p = & 6{,}111\,6330 \\
\hline
\log \sin \alpha = & 9{,}503\,4139 \\
\alpha = & 18^{0}\,35'\,8'',66
\end{array}$$

(oberer Block $+$, unterer Block $-$)

$$\begin{array}{rl}
\log I = & 3{,}422\,2565 \\
\log b = & 2{,}219\,8726 \\
\log 2 = & 0{,}301\,0300 \\
\hline
 & 5{,}943\,1591 \\
\log p = & 6{,}111\,6330 \\
\hline
\log \sin \beta = & 9{,}831\,5261 \\
\beta' = & 42^{0}\,43'\,25'',13 \\
\beta = & 137^{0}\,16'\,34'',87
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log I = & 3{,}422\,2565 \\
\log c = & 2{,}000\,0000 \\
\log 2 = & 0{,}301\,0300 \\
\hline
 & 5{,}723\,2865 \\
\log p = & 6{,}111\,6330 \\
\hline
\log \sin \gamma = & 9{,}611\,6535 \\
\gamma = & 24^{0}\,8'\,16'',45
\end{array}$$

(jeweils die drei Logarithmen $+$, dann $-$ $\log p$)

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = 18^{0}\,35'\,8'',66 \\ \beta = 137^{0}\,16'\,34'',87 \\ \gamma = 24^{0}\,8'\,16'',45 \end{array}\right\} + $$
$$\overline{179^{0}\,59'\,59'',98.}$$

4. Vierte Grundaufgabe.

$$b = 203{,}09; \quad c = 193{,}75; \quad \gamma = 72^{0}\,0'\,12'',00.$$

$$\sin\beta_1 = \frac{b\sin\gamma}{c}; \qquad \beta_2 = 180 - \beta_1.$$

Daraus folgt α_1 und α_2. Dann

$$a_1 = \frac{b\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}; \quad a_2 = \frac{b\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}.$$

Probe durch Inhaltsberechnung oder durch $a_1 - a_2 = 2c\cos\beta$.

$$\left.\begin{array}{r} \log b = 2{,}307\,6885 \\ \log\sin\gamma = 9{,}978\,2146 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} \gamma = 72^{0}\,0'\,12'',00 \\ \beta_1 = 85^{0}\,30'\,13'',53 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{r} 2{,}285\,9031 \\ \log c = 2{,}287\,2417 \end{array}\right\} - \qquad \left.\begin{array}{r} 157^{0}\,30'\,25'',53 \\ 179^{0}\,59'\,60'',00 \end{array}\right\} \overset{u}{-}$$

$$\begin{array}{r} \log\sin\beta_1 = 9{,}998\,6614 \\ \beta_1 = 85^{0}\,30'\,13'',53 \\ \beta_2 = 94^{0}\,29'\,46'',47 \end{array} \qquad \alpha_1 = 22^{0}\,29'\,34'',47$$

$$\left.\begin{array}{r} \gamma = 72^{0}\,0'\,12'',00 \\ \beta_2 = 94^{0}\,29'\,46'',47 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{r} 166^{0}\,29'\,58'',47 \\ 179^{0}\,59'\,60'',00 \end{array}\right\} \overset{u}{-}$$

$$\alpha_2 = 13^{0}\,30'\,1'',53$$

$$\left.\begin{array}{r} \log b = 2{,}307\,6885 \\ \log\sin\alpha_1 = 9{,}582\,7099 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} \log b = 2{,}307\,6885 \\ \log\sin\alpha_2 = 9{,}368\,1987 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}890\,3984 \\ \log\sin\beta = 9{,}998\,6614 \end{array}\right\} - \qquad \left.\begin{array}{r} 1{,}675\,8872 \\ \log\sin\beta = 9{,}998\,6614 \end{array}\right\} -$$

$$\begin{array}{r} \log a_1 = 1{,}891\,7370 \\ a_1 = 77{,}93580. \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log a_2 = 1{,}677\,2258 \\ a_2 = 47{,}55824. \end{array}$$

Probe:

$$\left.\begin{array}{r} \log c = 2{,}287\,2417 \\ \log\cos\beta = 8{,}894\,2812 \\ \log 2 = 0{,}301\,0300 \end{array}\right\} +$$

$$\log(a_1 - a_2) = 1{,}482\,5529; \quad a_1 - a_2 = 30{,}37756.$$

Die Inhaltsprobe ist immer anwendbar, die hier benutzte einfachere setzt die Ausrechnung der zwei Lösungen voraus für den Fall, daß sie vorhanden sind.

§ 11. Inkreis und Ankreise.

Wenn man den Mittelpunkt des Inkreises O (Fig. 137) mit den Ecken A, B, C verbindet, so zerfällt das Dreieck in drei Teildreiecke. Der Inhalt des Dreiecks AOC ist $\frac{1}{2}\varrho b$, wenn man den Radius des Inkreises, wie üblich, mit ϱ bezeichnet. Durch Bestimmung des Inhalts der beiden andern Dreiecke und Addition folgt (vgl. S. 248):

(1) $$I = \varrho\sigma.$$

Nun ist $AE = \sigma - a$, $BF = \sigma - b$, $CE = \sigma - c$, daher

(2) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - a}.$$

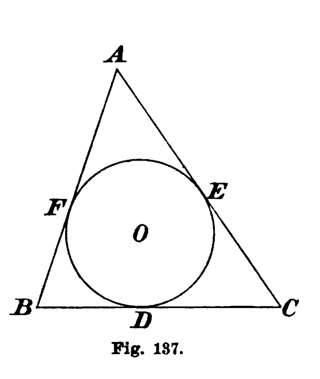


Fig. 137.

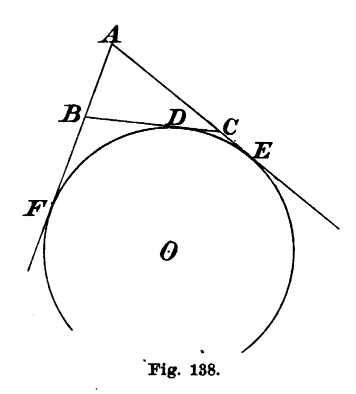


Fig. 138.

Diese Formeln liefern eine dritte Lösung der dritten Grundaufgabe, und zwar die klassische Lösung. Ihre Vorzüge sind folgende:

1. Nur vier Logarithmen sind aufzuschlagen, zu σ, $\sigma - a$, $\sigma - b$, $\sigma - c$.

2. Es werden die halben Dreieckswinkel gefunden. Daher macht es keinen Unterschied in der Rechnung, wenn ein Winkel stumpf ist.

3. Die Tangensfunktion liefert starke Differenzen und gibt daher genauere Bestimmungen.

4. Als Nebenprodukte kann man ϱ und I erhalten.

5. Die Addition der Winkel gibt eine untrügliche Probe.

Für die Ankreise ergeben sich entsprechende Formeln. In Fig. 138 ist

$$AF = AE = \sigma, \quad OE = \varrho_a,$$

daher:

$$AOC = \tfrac{1}{2}\varrho_a b, \quad AOB = \tfrac{1}{2}\varrho_a c, \quad BOC = \tfrac{1}{2}\varrho_a a,$$

also

$$I = AOB + AOC - BOC = \varrho_a(\sigma - a).$$

So findet man die Formelgruppe:

(3) $$I = \varrho_a(\sigma - a), \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{\sigma}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sigma - c}{\varrho_a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma - b}{\varrho_a}.$$

Aus den Formeln (3) ergibt sich eine fernere Lösung der dritten Grundaufgabe. Aus den vier Formeln

$$I = \varrho\sigma = \varrho_a(\sigma - a) = \varrho_b(\sigma - b) = \varrho_c(\sigma - c)$$

folgt leicht

(4) $$I^2 = \varrho\,\varrho_a\varrho_b\varrho_c.$$

Die Formeln dieses Paragraphen führen zu zahlreichen Schulaufgaben. Wir haben die Größen σ, $\sigma - a$, $\sigma - b$, $\sigma - c$, α, β, γ, ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, I durch Gleichungen verbunden, aus denen andere zum Teil sehr einfache und merkwürdige abgeleitet werden können. So ist

$$\varrho : \varrho_a = (\sigma - a) : \sigma,$$

also auch

$$\varrho : (\varrho_a - \varrho) = (\sigma - a) : a$$

und

$$\varrho : (\varrho_a + \varrho) = (\sigma - a) : (b + c),$$

folglich

(5) $$\frac{\varrho_a + \varrho}{\varrho_a - \varrho} = \frac{b + c}{a}.$$

Ebenso ist

$$\varrho_b : \varrho_c = (\sigma - c) : (\sigma - b),$$

also

(6) $$(\varrho_b + \varrho_c) : (\varrho_b - \varrho_c) = a : (b - c).$$

Am besten verbindet man im Unterricht diese Formeln mit geometrischen Betrachtungen (vgl. S. 250).

Für den Umkreis ist, wie wir S. 247 gesehen haben:

(7) $$r = \frac{abc}{4I}.$$

Aus den Gleichungen für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ ergibt sich bei Einsetzung des Ausdrucks für $\cos\alpha$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}},$$

also

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sigma(\sigma-a)}{bc}}, \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(\sigma-b)(\sigma-c)}{bc}}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (8) ergibt sich wieder eine Lösung der dritten Grundaufgabe. Sie ist nicht so gut wie die vorhin gegebene. Aus (8) folgt:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)}{abc} = \frac{I^2}{\sigma abc},$$

also mit Hülfe von (7):

$$(9)\qquad \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{4r}.$$

Aus (8) folgt durch Division

$$(10)\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(\sigma-b)(\sigma-c)}{\sigma(\sigma-a)}} = \frac{\varrho}{\sigma-a},$$

daher

$$(11)\qquad \begin{cases} \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma}{\varrho}, \\ \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} = \frac{c}{\varrho}. \end{cases}$$

Aus der letzten ergeben sich durch zyklische Vertauschung noch zwei andere Gleichungen. Ersetzt man die Kotangenten durch Quotienten $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, so folgt

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{\varrho}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\varrho}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{b}{\varrho}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Mithin durch Multiplikation:

$$(12)\qquad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{I}{4r\varrho}.$$

Aus $2I = bc\sin\alpha$ folgt mit Hülfe des Sinussatzes

$$(13)\qquad 2I = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Zahlenbeispiel zur Formelgruppe (2):

$$\left.\begin{aligned} a &= 185{,}04 \\ b &= 100{,}00 \\ c &= 203{,}09 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \sigma &= 244{,}065, & \sigma - b &= 144{,}065, \\ \sigma - a &= 59{,}025, & \sigma - c &= 40{,}975. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \log \sigma &= 2{,}387\,5055 \\ \log(\sigma - a) &= 1{,}771\,0360 \\ \log(\sigma - b) &= 2{,}158\,5585 \\ \log(\sigma - c) &= 1{,}612\,5190 \end{aligned}\right\} +$$

$$7{,}929\,6190 : 2$$

$$\left.\begin{aligned} \log I &= 3{,}964\,8095 \\ \log \sigma &= 2{,}387\,5055 \end{aligned}\right\} -$$

$$\log \varrho = 1{,}577\,3040$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= 32^0\,37'\,28'',25 \\ \frac{\beta}{2} &= 14^0\,41'\,45'',15 \\ \frac{\gamma}{2} &= 42^0\,40'\,46'',60 \end{aligned}\right\} +$$

$$90^0\;\;0'\;\;0'',00.$$

$$\left.\begin{aligned} \log \varrho &= 1{,}577\,3040 \\ \log(\sigma - a) &= 1{,}771\,0360 \end{aligned}\right\} -$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 9{,}806\,2680.$$

$$\left.\begin{aligned} \log \varrho &= 1{,}577\,3040 \\ \log(\sigma - b) &= 2{,}158\,5585 \end{aligned}\right\} -$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 9{,}418\,7455.$$

$$\left.\begin{aligned} \log \varrho &= 1{,}577\,3040 \\ \log(\sigma - c) &= 1{,}612\,5190 \end{aligned}\right\} -$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 9{,}964\,7850.$$

§ 12. Vierecksaufgaben.

Ein Viereck ist gegeben durch fünf Bestimmungsstücke. Dies erkennt man leicht, wenn man eine Diagonale zieht und bedenkt, daß sie den beiden entstehenden Dreiecken gemeinsam ist. Das Viereck der Ebene kann ferner aufgefaßt werden als ein Tetraeder, dessen Spitze in der Ebene der drei Grundpunkte liegt. Das Tetraeder ist durch sechs Stücke bestimmt, z. B. seine sechs Kanten, also das ebene Viereck durch ein Stück weniger. Die Bezeichnungen für das ebene Viereck entnehmen wir auch der Raumfigur und setzen

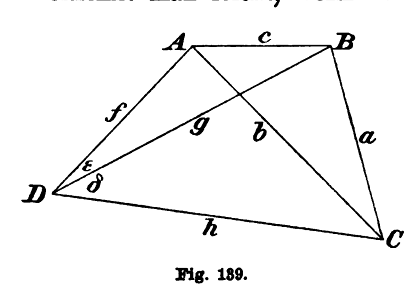


Fig. 139.

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b,$$
$$AD = f, \quad BD = g, \quad CD = h.$$

Welche Beziehung besteht zwischen den sechs Bestimmungsstücken, vier Seiten und zwei Diagonalen eines ebenen Vierecks?

Lösung. Sei Fig. 139 $\sphericalangle ADB = \varepsilon$, $BDC = \delta$, so können wir die drei Kosinus $\cos \delta$, $\cos \varepsilon$, $\cos(\varepsilon + \delta)$ durch die sechs Stücke a, b, c, f, g, h rational ausdrücken. Die Beziehung zwischen den Kosinus ist:

$$\cos(\delta+\varepsilon) = \cos\delta\cos\varepsilon - \sin\delta\sin\varepsilon,$$

(1) $1 - \cos^2\delta - \cos^2\varepsilon - \cos^2(\delta+\varepsilon) + 2\cos\delta\cos\varepsilon\cos(\varepsilon+\delta) = 0,$

wie wir schon S. 286 gefunden haben. Setzt man ein

$$2fg\cos\varepsilon = f^2 + g^2 - c^2, \quad 2gh\cos\delta = g^2 + h^2 - a^2,$$
$$2fh\cos(\varepsilon+\delta) = f^2 + h^2 - b^2,$$

so erhält man die gesuchte Beziehung. Sie heißt ausgeschrieben:

$$(2)\quad \begin{aligned} 0 &= a^2f^2(-a^2 - f^2 + b^2 + g^2 + c^2 + h^2) \\ &+ b^2g^2(-b^2 - g^2 + a^2 + f^2 + c^2 + h^2) \\ &+ c^2h^2(-c^2 - h^2 + a^2 + f^2 + b^2 + g^2) \\ &- a^2b^2c^2 - a^2g^2h^2 - b^2h^2f^2 - c^2f^2g^2. \end{aligned}$$

Die Formel ist von Euler (Tetraedervolum, 1752) entwickelt. Sind a, b, c, f, g bekannt, so erhält man h durch Lösung einer Gleichung 4[ten] Grades mit entgegengesetzt gleichen Wurzeln. Liegt D innerhalb der Dreiecksfläche, so bleibt die Formel ungeändert. Dreht man $\triangle ADB$ um AB als Achse, bis D wieder in die Ebene der Punkte ABC gelangt in D_1, so ist für das Viereck D_1ABC nur $D_1C = h_1$ verändert, während die übrigen fünf Stücke a, b, c, f, g bleiben. h_1 ist also die zweite wesentlich verschiedene Lösung zu (2).

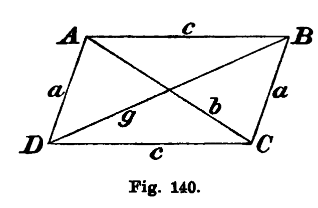


Fig. 140.

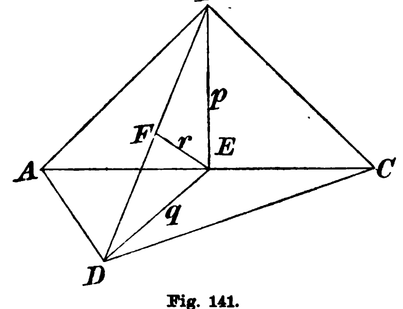


Fig. 141.

Für das Parallelogramm ist (Fig. 140)

$$\sphericalangle DAB = \alpha, \quad ABC = 180 - \alpha,$$

daher:

$$2ac\cos\alpha = a^2 + c^2 - g^2, \quad -2ac\cos\alpha = a^2 + c^2 - b^2,$$

mithin durch Addition:

(3) $$2a^2 + 2c^2 = b^2 + g^2.$$

Dieser für die Berechnung der Dreiecksmittellinien wichtige Satz zeigt, daß beim Parallelogramm die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen ist; vgl. S. 252. Wir bezeichnen in dem beliebigen Viereck $ABCD$, um die geometrische

Deutung der Klammerausdrücke in (2) zu ermitteln (Fig. 141), die Mitte von AC mit E, von DB mit F. Sei

$$BE = p, \quad DE = q, \quad EF = r.$$

Dann ist

$$4q^2 + b^2 = 2h^2 + 2f^2, \quad 4p^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2,$$

$$4r^2 + g^2 = 2p^2 + 2q^2,$$

also

$$(4) \qquad 4r^2 = -b^2 - g^2 + a^2 + f^2 + c^2 + h^2.$$

Der Mittelpunkt der beiden Diagonalen kann nur dann zusammenfallen, wenn r Null ist (vgl. S. 252). Gleichung (4) gibt die Deutung der in (2) auftretenden Klammerausdrücke.

Die Formel (2) läßt sich zur Lösung der Aufgaben benutzen: Gegeben drei Kreise. Man sucht das Potenzzentrum und den die drei Kreise berührenden Kreis.

Die Mittelpunkte der drei Kreise seien A, B, C; ihre Abstände a, b, c; ihre Radien α, β, γ. Setzt man dann

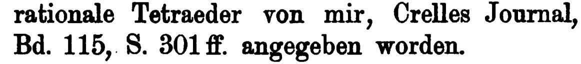
$$f^2 = \alpha^2 + x^2, \quad g^2 = \beta^2 + x^2, \quad h^2 = \gamma^2 + x^2,$$

so findet man das Potenzzentrum; setzt man

$$f = \alpha + x, \quad g = \beta + x, \quad h = \gamma + x,$$

so findet man x als Radius des Berührungskreises.

Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen sind von Kummer, Crelles Journal, Bd. 37, S. 1 ff. und im Anschluß an


rationale Tetraeder von mir, Crelles Journal, Bd. 115, S. 301 ff. angegeben worden.

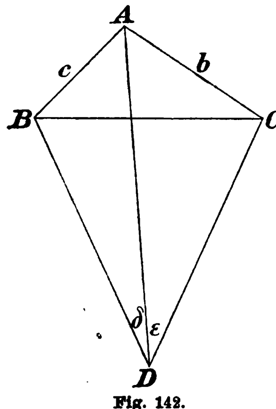
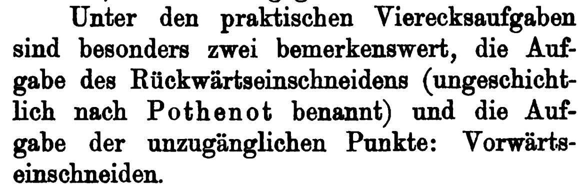


Fig. 142.


Unter den praktischen Vierecksaufgaben sind besonders zwei bemerkenswert, die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens (ungeschichtlich nach Pothenot benannt) und die Aufgabe der unzugänglichen Punkte: Vorwärtseinschneiden.

Die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens ist folgende. Gegeben (Fig. 142) ΔABC. Vom Punkte D aus ist A, B, C angezielt und sind damit die Winkel δ und ε bestimmt worden. Es soll D seiner Lage nach genau bestimmt werden.

Für D sind zwei geometrische Örter gegeben: Der Kreis über AB als Sehne, welcher δ faßt und der Kreis über AG, welcher ε faßt. Ist $ABCD$ ein Kreisviereck (der so-

genannte gefährliche Kreis), so ist die Bestimmung von D aus δ und ε nicht möglich. Vermieden wird er sicher, wenn A innerhalb des Dreiecks DBC liegt. Wir setzen:

$$\sphericalangle ABD = \beta, \quad ACD = \gamma, \quad AD = x; \quad BAC = \alpha.$$

Dann ist

$$c \sin \beta = x \sin \delta, \quad b \sin \gamma = x \sin \varepsilon.$$

Nach Division wird also:

$$(5) \qquad \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b \sin \delta}{c \sin \varepsilon}.$$

Nun ist $\beta + \gamma = 360^0 - \alpha - \delta - \varepsilon$, also bekannt. Wir haben die wichtige und oft vorkommende Aufgabe vor uns, zwei Winkel zu bestimmen, von denen man den Quotienten der Sinus und die Summe kennt. Diese Aufgabe greift man am besten rechnerisch an, obschon sie auch geometrisch durch Betrachtung des Dreiecks gelöst werden kann, welches aus dem Punkte D und den Mittelpunkten der durch ABD und ADC gelegten Kreise besteht. Es ist

$$(6) \qquad \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\sin \beta - \sin \gamma} = \frac{b \sin \delta + c \sin \varepsilon}{b \sin \delta - c \sin \varepsilon}.$$

Dies folgt aus (5), wenn man beiderseits 1 addiert und subtrahiert, dann die Ergebnisse dividiert.

Links erhalten wir den uns bekannten Wert (§ 6) rechts setzen wir

$$(7) \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{b \sin \delta}{c \sin \varepsilon},$$

wodurch (6) in

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{\sin \psi + \cos \psi}{\sin \psi - \cos \psi}$$

übergeht. Die rechte Seite kann man umformen, indem man $\cos \psi = \sin (90 - \psi)$ setzt oder indem man auf das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $\sin \psi$, $\cos \psi$ den Tangenssatz anwendet. In jedem Falle wird

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} (\psi - 45^0).$$

Die drei Gleichungen (7), (8) und

$$(9) \qquad x = \frac{b \sin \gamma}{\sin \varepsilon} = \frac{c \sin \beta}{\sin \delta}$$

lösen die Aufgabe. Die Doppelgleichung (9) liefert eine Probe. $\beta + \gamma > 180^0$, $\psi > 45^0$ hat zur Folge, daß in (8) sich das Vorzeichen rechts ändert. Dann muß man links $\gamma - \beta$ statt $\beta - \gamma$ nehmen.

Man kann auch ohne Kunstgriff verfahren. Wir setzen

$$\varphi = \beta + \gamma = 360^0 - \alpha - \varepsilon - \delta,$$

$$\gamma = \varphi - \beta.$$

$$b \sin\gamma \cdot \sin\delta = c \sin\beta \sin\varepsilon,$$

$$b \sin\delta (\sin\varphi \cos\beta - \cos\varphi \sin\beta) = c \sin\beta \sin\varepsilon,$$

(10) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{b \sin\delta \sin\varphi}{b \sin\delta \cos\varphi + c \sin\varepsilon}.$$

Ist $90^0 < \varphi < 180^0$, also φ stumpf, so setzen wir $180^0 - \varphi = \varphi'$ und haben:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b \sin\delta \sin\varphi'}{c \sin\varepsilon - b \sin\delta \cos\varphi'}.$$

Ist $\varphi > 180^0$, so setzen wir $\varphi = 180^0 + \varphi'$ und erhalten

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b \sin\delta \sin\varphi'}{b \sin\delta \cos\varphi' - c \sin\varepsilon}.$$

Zahlenbeispiel. Im Anschluß an Jordan, Handbuch der Vermessungskunde. A = Feldberg, B = Belchen, C = Kandel, D = Catharina.

$$AB = c = 14039{,}83\,m; \quad AC = b = 20994{,}59\,m;$$

$$\sphericalangle BAC = 115^0\,23'\,6'',40; \quad \delta = 22^0\,56'\,53'',46 = \sphericalangle ADB.$$

$$\sphericalangle ADC = \varepsilon = 34^0\,52'\,27'',44 \quad \text{(Fig. 142).}$$

$$\left.\begin{aligned} \log b &= 4{,}322\,1074 \\ \log\sin\delta &= 9{,}590\,9515 \end{aligned}\right\} +$$

$$\left.\begin{aligned} &3{,}913\,0589 \\ &3{,}904\,5891 \end{aligned}\right\} -$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = 10{,}008\,4698$$

$$\psi = 45^0\,33'\,31'',21.$$

$$\left.\begin{aligned} \log c &= 4{,}147\,3618 \\ \log\sin\varepsilon &= 9{,}757\,2273 \end{aligned}\right\} +$$

$$3{,}904\,5891$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 115^0\,23'\ \ 6'',40 \\ \delta &= 22^0\,56'\,53'',46 \\ \varepsilon &= 34^0\,52'\,27'',44 \end{aligned}\right\} +$$

$$173^0\,12'\,27'',30.$$

$$\left.\begin{aligned} &359^0\,59'\,60'',00 \\ &173^0\,12'\,27'',30 \end{aligned}\right\} -$$

$$\beta + \gamma = 186^0\,47'\,32'',70$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta+\gamma}{2} &= 93^0\,23'\,46'',35 \\ k &= 86^0\,36'\,13'',65 \end{aligned}\right\} +$$

$$180^0\ \ 0'\ \ 0'',00.$$

$$\left.\begin{aligned} \log \operatorname{tg} k &= 11{,}226\,6193 \\ \log \operatorname{tg}(\psi - 45^0) &= 7{,}989\,0460 \end{aligned}\right\} +$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{\gamma-\beta}{2} = 9{,}215\,6653$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\gamma-\beta}{2} &= 9^0 19' 51'',32\\ \frac{\gamma+\beta}{2} &= 93^0 23' 46'',35\end{aligned}\right\}\pm \qquad \begin{aligned}\gamma &= 102^0 43' 37'',67\\ \beta &= 84^0\ 3' 55'',03.\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\log c &= 4{,}147\,3618\\ \log\sin\beta &= 9{,}997\,6661\end{aligned}\right\}+ \qquad \left.\begin{aligned}\log b &= 4{,}322\,1074\\ \log\sin\gamma &= 9{,}989\,1962\end{aligned}\right\}+$$

$$\left.\begin{aligned}&= 4{,}145\,0279\\ \log\sin\delta &= 9{,}590\,9511\end{aligned}\right\}- \qquad \begin{aligned}&4{,}311\,3036\\ \log\sin\varepsilon &= 9{,}757\,2273\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log x &= 4{,}554\,0768\\ x &= 35\,815{,}97.\end{aligned} \qquad \log x = 4{,}544\,0763.$$

Dieselbe Aufgabe ohne Kunstgrifflösung gestaltet sich wie folgt:

$$\varphi = 186^0 47' 32'',70; \quad \varphi' = 6^0 47' 32'',70.$$

$$\left.\begin{aligned}\log b &= 4{,}322\,1074\\ \log\sin\delta &= 9{,}590\,9515\\ \log\cos\varphi' &= 9{,}996\,9410\end{aligned}\right\}+ \qquad \left.\begin{aligned}\log b &= 4{,}322\,1074\\ \log\sin\delta &= 9{,}590\,9515\\ \log\sin\varphi' &= 9{,}072\,8839\end{aligned}\right\}+$$

$$\begin{aligned}\log p &= 3{,}909\,9999\\ p &= 8128{,}304\end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned}&2{,}985\,9428\\ \log N &= 2{,}002\,7749\end{aligned}\right\}-$$

$$\left.\begin{aligned}\log c &= 4{,}147\,3618\\ \log\sin\varepsilon &= 9{,}757\,2273\end{aligned}\right\}+ \qquad \begin{aligned}\log \operatorname{tg}\beta &= 10{,}983\,1679\\ \beta &= 84^0\,3' 55'',13.\end{aligned}$$

$$\log q = 3{,}904\,5891; \quad q = 8027{,}663.$$

$$N = p - q = 100{,}641.$$

Die Aufgabe des Vorwärtseinschneidens oder der unzugänglichen Punkte ist folgende. Sei (Fig. 143) die Standlinie $AB = c$ genau gemessen und von ihren Endpunkten aus seien die unzugänglichen Punkte C und D angezielt. Die Winkel bezeichnen wir der Figur entsprechend. α_1, α_2, α_3, α_4 sind bekannt. Gesucht ist DC. Zunächst sind α_8 und α_5 bestimmbar, da

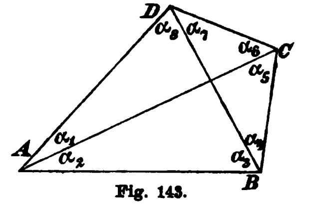


Fig. 143.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^0.$$

Auch ist

$$\alpha_6 + \alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Ferner ist

$$BC = c\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_5}, \quad DC = BC\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_7} = c\,\frac{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5\cdot\sin\alpha_7};$$

$$AD = c\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_8}, \quad DC = AD\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_6} = c\,\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_3}{\sin\alpha_6\cdot\sin\alpha_8}.$$

Daraus folgt:

$$\text{(11)} \qquad \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \sin\alpha_5 \sin\alpha_7 = \sin\alpha_2 \sin\alpha_4 \sin\alpha_6 \sin\alpha_8 .$$

Die Formel prägt sich trefflich dem Gedächtnis ein und ist leicht in Worte zu fassen. α_6 und α_7, deren Summe bekannt ist, bestimmen wir wie bei der vorigen Aufgabe. Wir haben

$$\text{(12)} \qquad \frac{\sin\alpha_7}{\sin\alpha_6} = \frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_4 \cdot \sin\alpha_8}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_5} = \operatorname{tg}\psi,$$

$$\frac{\sin\alpha_7 + \sin\alpha_6}{\sin\alpha_7 - \sin\alpha_6} = \frac{\sin\psi + \cos\psi}{\sin\psi - \cos\psi},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_7 - \alpha_6}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_7 + \alpha_6}{2} \cdot \operatorname{tg}(\psi - 45^0).$$

$$\text{(13)} \qquad DC = c\,\frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_4}{\sin\alpha_5 \cdot \sin\alpha_7} = c\,\frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3}{\sin\alpha_6 \cdot \sin\alpha_8}$$

gibt Lösung und Probe.

Zahlenbeispiel. Entnommen der Triangulierung über das Mittelmeer von Ibanez und Perrier 1879 (Jordan, Verm. III, 23). A = Mulhacen, B = Tetica, C = M'Sabiha, D = Filhaoussen.

$$AB = c = 82\,827\ m,$$

$$\alpha_1 = 22^0\,28'\,45''; \quad \alpha_2 = 50^0\,0'\,25'';$$

$$\alpha_3 = 89^0\,39'\,16''; \quad \alpha_4 = 24^0\,1'\,11''.$$

Bei so großen Dreiecken ist die Einwirkung der Kugelgestalt der Erde deutlich zu merken. Der Überschuß der Winkelsumme über 180° betrug nach Jordan Werte, die bis zu einer Minute gingen (III, 234). Dies soll hier unberücksichtigt bleiben.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 22^0\,28'\,45'' \\ \alpha_2 = 50^0\;\;0'\,25'' \\ \alpha_3 = 89^0\,39'\,16'' \\ \alpha_8 = 17^0\,51'\,34'' \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha_2 = 50^0\;\;0'\,25'' \\ \alpha_3 = 89^0\,39'\,16'' \\ \alpha_4 = 24^0\;\;1'\,11'' \\ \alpha_5 = 16^0\,19'\;\;8'' \end{array}\right\} +$$

$$180^0\;\;0'\;\;0'' \qquad\qquad 180^0\;\;0'\;\;0''$$

$$\left.\begin{array}{l} \log\sin\alpha_2 = 9{,}884\,2981 \\ \log\sin\alpha_4 = 9{,}609\,6489 \\ \log\sin\alpha_8 = 9{,}486\,6896 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{l} \log\sin\alpha_1 = 9{,}582\,4582 \\ \log\sin\alpha_3 = 9{,}999\,9921 \\ \log\sin\alpha_5 = 9{,}448\,6802 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{r} 8{,}980\,6366 \\ 9{,}031\,1305 \end{array}\right\} - \qquad\qquad 9{,}031\,1305$$

$$\log\operatorname{tg}\psi = 9{,}949\,5061$$

$$\begin{array}{rl} \psi = & 41^\circ 40' 36'',09 \\ & 44^\circ 59' 60'' \end{array} \Bigg\} \overset{u}{-} \qquad \begin{array}{rl} \alpha_2 = & 50^\circ\ 0' 25'' \\ \alpha_3 = & 89^\circ 39' 16'' \end{array} \Bigg\} +$$

$$45^\circ - \psi = \ 3^\circ 19' 23'',91 \qquad 139^\circ 39' 41''$$

$$\frac{\alpha_6 + \alpha_7}{2} = 69^\circ 49' 50'',50$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha_6 + \alpha_7}{2} = & 10,434\,9844 \\ \log \operatorname{tg} (45^\circ - \psi) = & 8,763\,9354 \end{array} \Bigg\} +$$

$$9,198\,9198$$

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}(\alpha_6 - \alpha_7) = & 8^\circ 59'\ 1'',88 \\ \frac{1}{2}(\alpha_6 + \alpha_7) = & 69^\circ 49' 50'',50 \end{array} \Bigg\} \pm$$

$$\alpha_6 = 78^\circ 48' 52'',38$$
$$\alpha_7 = 60^\circ 50' 48'',62$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 4,918\,1719 \\ \log \sin \alpha_2 = & 9,884\,2981 \\ \log \sin \alpha_4 = & 9,609\,6489 \end{array} \Bigg\} + \qquad \begin{array}{rl} \log \sin \alpha_7 = & 9,941\,1737 \\ \log \sin \alpha_5 = & 9,448\,6802 \\ \hline & 9,389\,8539 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,412\,1189 \\ 9,389\,8539 \\ \hline \log x = 5,022\,2650 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 4,918\,1719 \\ \log \sin \alpha_1 = & 9,582\,4582 \\ \log \sin \alpha_3 = & 9,999\,9921 \end{array} \Bigg\} + \qquad \begin{array}{rl} \log \sin \alpha_6 = & 9,991\,6710 \\ \log \sin \alpha_8 = & 9,486\,6896 \\ \hline & 9,478\,3606 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,500\,6222 \\ 9,478\,3606 \\ \hline \log x = 5,022\,2616 \\ x = 10\,5259,6. \end{array}$$

Eine ähnliche Aufgabe ist bei der Kleintriangulierung der Anschluß eines vierten Punktes an ein gegebenes Dreieck.

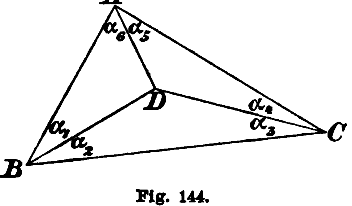


Fig. 144.

Das Dreieck ABC sei gegeben und genau bekannt.

Der Punkt D (Fig. 144) soll an das Dreieck angeschlossen werden. Zu diesem Zwecke wird D von B und C aus angezielt, wodurch die Winkel α_1, α_2, α_3, α_4 bekannt werden. Von α_5 und α_6 kennt man durch das gegebene Dreieck die Summe. Ferner ist

$$BD = DC \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}; \quad AD = DC \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_6};$$

und

$$AD = DC \cdot \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5}.$$

Daher wird

(14) $$\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_5 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_4 \cdot \sin\alpha_6.$$

Die Formel prägt sich wieder dem Gedächtnis leicht ein. Aus

$$\frac{\sin\alpha_5}{\sin\alpha_6} = \frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_4}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3}; \quad \alpha_5 + \alpha_6 = \alpha$$

ergibt sich die Lösung:

(15) $$\frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_4}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3} = \operatorname{tg}\psi; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_5 - \alpha_6}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}(\psi - 45^0).$$

Sind die Winkel gefunden, so kann man DA, DB, DC mit Hülfe des Sinussatzes aus den Dreiecksseiten bestimmen.

Vorstehende Aufgabe kann auch in der Form auftreten: Gegeben ein Dreieck ABC durch seine Seiten a, b, c. Im Innern der Dreiecksfläche ist ein Punkt D durch die Abstände $DB = g$, $DC = h$ gegeben. Man bestimme $DA = f$. In dieser Fassung kommen wir auf die Aufgabe S. 307, Gl. (2) zurück. Diese Aufgabe ist für den ersten Unterricht besonders zu empfehlen. Man berechne zuerst die Winkel der Dreiecke ABC und DBC, dann löse man die Dreiecke ADB und ADC durch Tangenssatz und Sinussatz oder bestimme AD durch den Kosinussatz aus beiden.

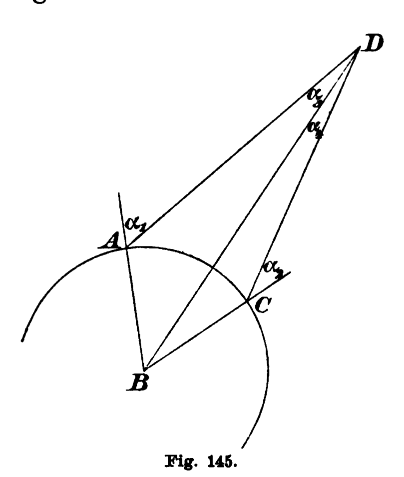


Fig. 145.

Hierhin gehört auch die einfachste Parallaxenaufgabe. B sei (Fig. 145) das Zentrum der Erde, A und C zwei Punkte auf demselben Meridian, D ein Gestirn, dessen Zenithdistanzen α_1 und α_2 in A und C gemessen sind. Der Winkel ABC ist als Breitenunterschied der Örter A und C gegeben, $\sphericalangle ABC = \omega$. Dann ist $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 + \omega$, also $\alpha_3 + \alpha_4$ ist bekannt. $AB = CB = r$. Es ist

$$BD = \frac{r\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} = \frac{r\sin\alpha_2}{\sin\alpha_4},$$

also

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}; \quad \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \omega.$$

Der Inhalt des Vierecks. Wir wenden die Bezeichnungen der Fig. 139 an, nennen aber die Winkel des Vierecks A, B, C, D, den Inhalt I. Dann ist

$$g^2 = c^2 + f^2 - 2cf\cos A = a^2 + h^2 - 2ah\cos C.$$
$$2I = fc\sin A + ah\sin C.$$

Bilden wir nun die beiden Gleichungen:

$$2ah\cos C - 2cf\cos A = a^2 + h^2 - c^2 - f^2;$$
$$2ah\sin C + 2cf\sin A = 4I,$$

quadrieren und addieren, so folgt nach einfacher Rechnung:

$$(16a)\qquad -8acfh\cos(A+C) = 16I^2 + a^4 + c^4 + f^4 + h^4 - 2a^2c^2 - 2a^2f^2 - 2a^2h^2 - 2c^2f^2 - 2c^2h^2 - 2f^2h^2.$$

Es ist aber

$$P = (-a+c+f+h)(a-c+f+h)(a+c-f+h)(a+c+f-h) = -a^4 - c^4 - f^4 - h^4 + 2a^2c^2 + 2a^2f^2 + 2a^2h^2 + 2c^2f^2 + 2c^2h^2 + 2f^2h^2 + 8acfh.$$

Folglich ist

$$16I^2 = P - 8acfh(1 + \cos(A+C)),$$

oder

$$(16)\qquad 16I^2 = P - 16acfh\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

Hieraus ergibt sich für das Kreisviereck sofort die S. 267, (6) gegebene Formel.

In den Bezeichnungen S. 266, Fig. 36

$$AB = a,\quad BC = b,\quad CD = c,\quad DA = d,\quad AC = e,\quad BD = f$$

nimmt die Formel für den Flächeninhalt des Vierecks die Form an:

$$(17)\quad 16I^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

Bilden wir aus a, b, c, d in anderer Reihenfolge ein Viereck, für welches $A + C$ denselben Wert behält, so bleibt der Inhalt I ungeändert. Sei aus a, b, c, d als Seiten ein Kreisviereck gebildet mit dem Inhalt F, so ist

$$(18)\qquad F^2 = I^2 + abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

Durch Addition der Dreiecke ADB und DBC (Fig. 139) und durch Anwendung des Kosinussatzes erhält man:

$$2fg\sin\varepsilon + 2gh\sin\delta = 4I,$$
$$2fg\cos\varepsilon - 2gh\cos\delta = a^2 + f^2 - h^2 - c^2.$$

Quadriert man und addiert, so folgt:

$$(18a)\qquad 4g^2b^2 = 16I^2 + (a^2 + f^2 - h^2 - c^2)^2.$$

Entnimmt man nun den Wert von $16I^2$ der Gleichung (16a), so ergibt sich:

$$b^2g^2 = a^2f^2 + h^2c^2 - 2acfh\cos(A + C),$$

oder in Anwendung der Bezeichnungen S. 266:

$$(19)\qquad e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C).$$

Diese Formel gilt allgemein für jedes Viereck. Sie zeigt, daß der Ptolemaeische Satz umkehrbar ist.

Die Bezeichnungen der Fig. 139 lassen die Gegenseiten (Gegenkanten im Tetraeder) af, bg, ch deutlich hervortreten, die andern sind jedoch in der Schulmathematik gebräuchlicher. Wir wollen sie daher für das Tangentenviereck ausschließlich verwenden. Für dieses ist

$$(20)\qquad a + c = b + d = \sigma.$$

Der Ausdruck P verwandelt sich daher in $16abcd$ und es ist

$$(21)\qquad I^2 = abcd\sin^2\frac{A + C}{2}.$$

Der Radius des Kreises, den die Seiten berühren, sei ϱ, so ist

$$I = \varrho\sigma,$$

daher

$$(22)\qquad \sigma^2\varrho^2 = abcd\sin^2\frac{A + C}{2}.$$

Aus (20) folgt

$$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2bd - 2ac.$$

Aus Gl. (18a) wird aber in den gebräuchlicheren Bezeichnungen

$$4e^2f^2 = 16I^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2.$$

Also ist für das Tangentenviereck

$$(23)\qquad 4I^2 = (ef + ac - bd)(ef - ac + bd).$$

Ist das Tangentenviereck zugleich Kreisviereck, so gilt der Ptolemaeus und (23) verwandelt sich in

$$I^2 = abcd,$$

was mit (21) übereinstimmt.

§ 13. Elementare Kreisberechnung.

Der Radius des zu bestimmenden Kreises sei r. Der Inhalt eines Dreiecks mit den gleichen Seiten r und dem von ihnen gebildeten Zentriwinkel $\frac{2\pi}{n}$ ist

$$\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n},$$

also der Inhalt des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist

(1) $$A = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete r und dem Zentriwinkel $\frac{\pi}{n}$ hat den Inhalt $\frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, also das dem Kreise umbeschriebene regelmäßige n-Eck hat den Inhalt

(2) $$B = n r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Hieraus folgt, daß das dem Kreise einbeschriebene regelmäßige $2n$-Eck den Inhalt C und das ihm umbeschriebene $2n$-Eck den Inhalt D hat:

$$C = n r^2 \sin \frac{\pi}{n}, \quad D = 2 n r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}.$$

Nun ist

$$AB = \frac{1}{2} n^2 r^4 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = n^2 r^4 \sin^2 \frac{\pi}{n},$$

also

(3) $$C^2 = AB.$$

Weiter ist

$$A + C = n r^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} = 4 n r^2 \cos^3 \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{\pi}{2n},$$

$$C^2 = 4 n^2 r^4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2n},$$

also

$$\frac{C^2}{A + C} = n r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n},$$

oder

(4) $$D = \frac{2AB}{A + C}.$$

Die Formeln (3) und (4) lösen die Aufgabe. Wir setzen statt C und D von nun an A', B'. Aus einem Paar A, B bestimmen wir das Paar A', B' durch die Formeln

(5) $$A'^2 = AB; \quad B' = \frac{2AB}{A + A'}.$$

Aus A' und B' bestimmen wir ein neues Paar A'', B'' usw. bis die Werte $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ übereinstimmen. Dieses Verfahren ist anschaulicher als das vom Umfange hergeleitete. Auch erleichtert die geometrische Anschauung den Schluß, daß $A^{(n)}$ mit $B^{(n)}$ bis auf einen beliebig kleinen Unterschied übereinstimmen und daher den Grenzwert für den Inhalt des Kreises geben muß. Von welchem regelmäßigen n-Eck man ausgeht, ist gleichgültig. Diese Methode geht im wesentlichen auf Archimedes zurück und ist in alle Schulbücher übergegangen. Eine weitere Darstellung kann daher hier unterbleiben.

Es entsteht nun die Frage, ob das Verfahren nicht abgekürzt werden kann. Diese Frage ist zu bejahen. Sei

$$B = A + \alpha.$$

Dann ist für kleine Werte von α unter Vernachlässigung höherer Potenzen:

$$C = A + \tfrac{1}{2}\alpha, \quad D = A + \tfrac{3}{4}\alpha.$$

Die Formeln (5) können daher durch die einfacheren ersetzt werden:

$$(6) \qquad A' = \tfrac{1}{2}(A + B); \quad B' = \tfrac{1}{4}(A + 3B).$$

Nach diesen Formeln kann man A'', A''' usw. mit großer Schnelligkeit berechnen; ja man kann den Endwert sofort ableiten. Aus (6) folgt:

$$(7) \qquad B' - A' = \frac{B-A}{4}, \quad \text{also} \quad B'' - A'' = \frac{B-A}{16} \quad \text{usw.}$$

$$\frac{A+2B}{3} - A = 2\frac{B-A}{3}; \quad B - \frac{A+2B}{3} = \frac{B-A}{3}.$$

$$\frac{A'+2B'}{3} = \frac{A+2B}{3},$$

also unveränderlich. Mithin ist

$$(8) \qquad \frac{A^{(n)}+2B^{(n)}}{3} = \frac{A+2B}{3}.$$

Wie (7) zeigt, ist $A^{(n)} - B^{(n)}$ beliebig klein, also ohne Fehler $A^{(n)} = B^{(n)}$. Dann zeigt (8):

$$(9) \qquad A^{(n)} = B^{(n)} = \frac{A+2B}{3}.$$

Ist also $B = A + \alpha$ und α eine Größe, die kleiner als eine Einheit der n^{ten} Stelle ist, so folgt aus (9):

$$A^{(n)} = A + \tfrac{2}{3}\alpha.$$

Stimmen A und B auf n Stellen überein, so erhält man π bis auf die doppelte Anzahl genau. Für das 256-Eck $r = 1$ ist

$$A = 3{,}141\,2772, \quad B = 3{,}141\,7504,$$

also

$$\alpha = 0{,}000\,4732$$

und

$$A^{(n)} = 3{,}141\,5927.$$

Hierin ist nun der entscheidende Schritt zur Berechnung von π getan. Denn wir brauchen nur statt der Formeln (6) andere aufzustellen, welche höhere Potenzen von α als die zweite oder höhere als die dritte usw. vernachlässigen und können dann sofort aus gegebenen A, B die Endwerte $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ berechnen. Das heißt, wir haben gelernt, π durch Reihenentwicklung zu finden.

Zur Beurteilung der Stärke der Annäherung beachten wir nach (5)

$$B' - A' = \frac{2AB}{A + \sqrt{AB}} - \sqrt{AB} = \sqrt{AB}\,\frac{\sqrt{B} - \sqrt{A}}{\sqrt{B} + \sqrt{A}},$$

also

$$B' - A' = \sqrt{AB}\,\frac{B - A}{(\sqrt{B} + \sqrt{A})^2}.$$

Entwickelt man den Nenner und gibt ihm die Form

$$B + A + 2\sqrt{AB},$$

dividiert Zähler und Nenner durch $\sqrt{AB}$ und setzt

$$\sqrt{\frac{B}{A}} + \sqrt{\frac{A}{B}} + 2 = 4 + \left(\sqrt[4]{\frac{B}{A}} - \sqrt[4]{\frac{A}{B}}\right)^2,$$

so ist dieser Ausdruck > 4, also

$$B' - A' < \frac{B - A}{4}. \tag{10}$$

Diese Ableitung gilt ganz allgemein.

Die merkwürdigen Formeln (5) regen noch zu einer weiteren Frage an. In diesen Formeln kommt die Beziehung zur Kreisberechnung gar nicht vor. Man kann also fragen: Was wird aus den Formeln (5) als Grenzwert hervorgehen, wenn A und B beliebige positive Werte bedeuten?

Zur Entscheidung dieser Frage beachten wir, daß ist

$$\frac{A'}{B'} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{A}{B}}\right).$$

Ist also $B > A$, so setzen wir

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \cos\alpha \quad \text{und finden} \quad \sqrt{\frac{A'}{B'}} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Der Quotient $\frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ nähert sich der Einheit, weil α durch fortgesetzte Halbierung gleich Null wird. Ferner ist

$$A = B\cos^2\alpha, \quad \text{also} \quad A' = \sqrt{AB} = B\cos\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}.$$

Ebenso ergibt sich, da $A'' = \sqrt{A'B'}$,

$$A' = B'\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad \text{also} \quad A'' = B'\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

oder

$$A'' = \frac{A'}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

daher:

$$A'' = \frac{A}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich

$$A^{(n)} = \frac{A}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\cdots}.$$

Setzen wir nun

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin(2\alpha)}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\cdots,$$

so ist

$$\varphi(2\alpha) = \frac{2\alpha}{\sin(4\alpha)}\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdots,$$

also

$$\frac{\varphi(2\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)}{\sin(4\alpha)} = 1.$$

Es ist also

$$\varphi(2\alpha) = \varphi(\alpha) = \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cdots = \varphi(4\alpha) = \cdots.$$

$\varphi(\alpha)$ ist also eine Konstante und hat den Wert $\frac{1}{2}$, wie die Annahme $\alpha = 0$ zu erkennen gibt. Es ist also

$$(11) \qquad A^{(n)} = \frac{2\alpha}{\sin(2\alpha)}\cdot A.$$

Geht man von den Formeln (5) aus unter der Voraussetzung, daß A und B beliebige positive Größen sind, $B > A$, so ist die

Entwicklung eine konvergente [gemäß (10)] und der gemeinsame Endwert, dem $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$ zustreben, ist

$$A^{(n)} = B^{(n)} = \frac{2\alpha}{\sin(2\alpha)} \cdot A,$$

wo

(12) $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

α ist in natürlichem Maß zu nehmen.

Ist $A > B$, so stößt man auf die hyperbolischen Funktionen. Die Annahme

$$\frac{A}{B} = \mathfrak{Cof}^2\,\alpha$$

führt hier zum Ziel. Geometrisch hat man die Flächenbestimmung der gleichseitigen Hyperbel vor sich und zwar durch ein durchaus der Kreisberechnung entsprechendes Verfahren.

Vierter Teil.

Stereometrie.

§ 1. Einleitung.

Die Stereometrie ist derjenige Teil der Geometrie, welcher sich mit den geometrischen Gebilden im Raume beschäftigt. Der Name (στερεός, fest) weist auf die dreifach ausgedehnten Körper als den nächstliegenden Gegenstand dieser Wissenschaft hin.

In der Ebene haben wir als Grundgebilde Punkt und Gerade zu betrachten. Im Raume kommt als drittes Gebilde die Ebene hinzu. Für die wissenschaftliche Auffassung und Darlegung der Grundelemente verweisen wir auf das Werk, Einführung in die Grundlagen der Geometrie von W. Killing und auf die vortreffliche Schrift von Enriques-Fleischer, Projektive Geometrie, B. G. Teubner 1903. Wir wollen die bei Einleitung in die Planimetrie gegebenen Erörterungen durch folgende Darlegungen vervollständigen. Wir betonen nochmals die Tatsache, daß man in der Geometrie nicht alles definieren kann. Definieren heißt, einen gewissen Begriff durch Zurückführung auf andere bereits bekannte erklären. Folglich kann diese Zurückführung nicht ins Endlose verlaufen, sondern muß auf gewisse Grundbegriffe leiten, die keiner Erklärung fähig und auch nicht bedürftig sind. Die Entstehung dieser Grundbegriffe ist eine interessante Frage, deren Beantwortung aber nicht Aufgabe der Geometrie, sondern der Philosophie ist. Freilich kann die richtige Antwort nur unter umfassendster Bezugnahme auf die schwierigsten Gebiete der geometrischen Forschung erwartet werden.

Zwei Punkte im Raume bestimmen eine Gerade, welche durch diese Punkte geht oder sie enthält. Drei Punkte, welche nicht derselben Geraden angehören, bestimmen eine Ebene, welche durch diese Punkte geht oder sie enthält.

Ein Punkt und eine ihn nicht enthaltende Gerade bestimmen eine Ebene, welche den Punkt und die Gerade enthält.

Zwei Ebenen können so beschaffen sein, daß sie keinen Punkt gemeinsam haben. Sie heißen dann parallel. Zwei Ebenen, welche irgend einen Punkt gemeinsam haben, enthalten unendlich viele

gemeinsame Punkte, welche in einer geraden Linie liegen. Zwei Ebenen sind entweder parallel oder schneiden sich in einer geraden Linie. Jede Ebene zerlegt den Gesamtraum und alle seine Punkte in drei Teile. Ein Teil gehört der Ebene selbst an; die beiden andern werden durch die Ebene getrennt. Die Gleichung der Ebene in Cartesischen Koordinaten hat die Form $ax + by + cz - d = 0$. Für jeden andern, der Ebene nicht angehörenden Punkt (x, y, z) gibt die linke Seite der Gleichung nicht den Wert 0, sondern entweder einen positiven oder negativen reellen Wert. Zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) liegen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Ebene, je nachdem die beiden Ausdrücke

$$ax_1 + by_1 + cz_1 - d \quad \text{und} \quad ax_2 + by_2 + cz_2 - d$$

gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben. Diese Betrachtung läßt sich in gewisser Hinsicht auf jede Fläche $F(x, y, z) = 0$ ausdehnen, wo $F(x, y, z)$ vorläufig eine ganze Funktion sein mag. Auf Besonderheiten kann nicht eingegangen werden; vgl. S. 176.

Zwei Gerade sind entweder parallel oder sie schneiden sich oder keins von beiden findet statt. In den erstgenannten zwei Fällen gehören die Geraden einer Ebene an, welche sie bestimmen. Im dritten Falle sind die Geraden windschief.

Der Parallelismus führt zum Begriff Richtung. Wenn eine Gerade durch einen gegebenen Punkt gehen und zugleich einer gegebenen Geraden parallel sein soll, so ist ihre Richtung bestimmt. Auch führt der Parallelismus zur Einführung der sogenannten uneigentlichen Elemente. Um den Parallelismus nicht immer als besonderen Fall dem allgemeinen Verhalten des Schneidens, also der gemeinsamen Punkte gegenüberstellen zu müssen, sagen wir von zwei parallelen Linien, sie schneiden sich in einem unendlich fernen Punkt, sagen wir von zwei parallelen Ebenen, sie schneiden sich in einer unendlich fernen Geraden. Jede Gerade hat einen unendlich fernen Punkt, jede Ebene eine unendlich ferne Gerade. Im Raume gibt es eine unendlich ferne Ebene. Diese uneigentlichen Elemente dürfen im Unterricht nicht in den Vordergrund treten, sondern nur gelegentlich erwähnt werden. Den besten Zugang zu diesen Gebilden für den Anfänger bieten in der Raumgeometrie teils weiter unten zu besprechende Aufgaben und Sätze, teils die analytische Geometrie.

Neben dem ebenen Winkel, dessen Begriff die Stereometrie mit der Planimetrie teilt, besitzt sie in dem Flächenwinkel ein besonderes geometrisches Gebilde verwandter Art. Der Flächenwinkel entsteht beim Durchschnitt zweier Ebenen. Die Schnittgerade heißt Durchschnittskante des Flächenwinkels. Wie beim Schneiden zweier Geraden jedesmal vier Winkel entstehen, die paarweise gleich

sind, so entstehen beim Schneiden von zwei Ebenen jedesmal vier Flächenwinkel. Unterscheiden wir die von der Durchschnittskante getrennten Teile jeder Ebene, so haben wir vier Halbebenen vor uns. Haben die Flächenwinkel eine Halbebene gemeinsam, so nennen wir die mit den andern Halbebenen gebildeten Flächenwinkel Nebenwinkel. Die Fortsetzungen jeder Halbebene des Flächenwinkels bilden einen Flächenwinkel, den wir Scheitelwinkel nennen können.

Betrachten wir jetzt eine dritte Ebene, die wir den bisher untersuchten gegenüberstellen.

Sind die ursprünglichen Ebenen parallel, so kann die dritte entweder beiden parallel sein oder beide schneiden. Es ist unmöglich, daß sie der einen parallel sei und die andere schneide. Die Schnittlinien, welche die dritte mit den zwei parallelen Ebenen bestimmt, sind parallel, weil ein gemeinsamer Punkt beiden parallelen Ebenen angehören müßte.

Schneiden sich zwei Ebenen, so ist die dritte Ebene der Durchschnittskante entweder parallel oder nicht. Im ersteren Falle entsteht ein prismenartiges unendliches Gebilde mit drei von drei parallelen Geraden begrenzten Seitenflächen und drei Flächenwinkeln. Schneidet die dritte Ebene die Durchschnittskante der beiden andern, so entsteht ein geometrisches Gebilde, welches wir als dreiseitige Ecke bezeichnen. Wir haben an jeder Ecke acht Flächenwinkel und acht Winkelräume. Jeder Punkt des unendlichen Raumes fällt entweder in eine der drei Ebenen oder in einen der acht Winkelräume. Jeder Winkelraum ist begrenzt von drei Halbebenen und enthält drei in der Ecke zusammenlaufende Halbgerade, die wir Kanten nennen. Die acht Winkelräume wollen wir nunmehr auch Ecken nennen. Wir bezeichnen zwei Ecken mit zwei gemeinsamen Kanten und einer fortgesetzten als Nebenecken, solche mit einer gemeinsamen und zwei fortgesetzten Kanten als Gegenecken, solche mit drei fortgesetzten Kanten als Scheitelecken. Jede Ecke hat drei Nebenecken, drei Gegenecken, eine Scheitelecke. Jede Ecke ist ein unendliches Gebilde mit drei Kanten, drei von ihnen gebildeten ebenen Winkeln, die wir Seiten nennen, und drei Flächenwinkeln. Es ist unerläßlich, der Ecke die Kugel gegenüber zu stellen. Beschreibt man um den Scheitelpunkt der Ecke mit beliebigem Radius eine Kugel, so entstehen auf der Kugelfläche durch die Schnittpunkte mit den Kanten drei Punkte, Eckpunkte eines Kugeldreiecks. Die ebenen Winkel der Ecke bestimmen und stellen her durch die ihnen entsprechenden Kreisbogen die Seiten des Dreiecks. Daher der Name für die ebenen Winkel der Ecke. Daß auch die Winkel des Dreiecks in derselben Beziehung zu den Flächenwinkeln der Ecke stehen, werden wir bald zeigen.

§ 2. Punkt und Ebene.

Für die Schulgeometrie können die Lagenbeziehungen nicht so hervortreten wie in der ausschließlich wissenschaftlichen Behandlung. Die Maßbeziehungen haben den Vorteil größerer Faßbarkeit und leichterer Verwendung für praktische Aufgaben. Wir stellen an die Spitze die Satzgruppe über die Senkrechte zur Ebene.

Verbindet man einen Punkt P mit allen Punkten der Ebene, so sind die erhaltenen Entfernungen des außerhalb liegenden Punktes von den Punkten der Ebene im allgemeinen ungleich. Sei in der Ebene eine Gerade gezogen, so ist durch diese Gerade und P eine zweite Ebene bestimmt. Unter allen Punkten der Geraden hat einer, A, den kleinsten Abstand von P; es ist A der Fußpunkt des von P auf die Gerade gefällten Lotes. Liegen zwei Punkte B, C (Fig. 146) symmetrisch zu A, also $BA = CA$, so ist auch $PB = PC$. Errichtet man nun in A zu BC eine Senkrechte, so kann man die Schlußfolgerung weiter fortsetzen. Fällt man nämlich auf diese Senkrechte

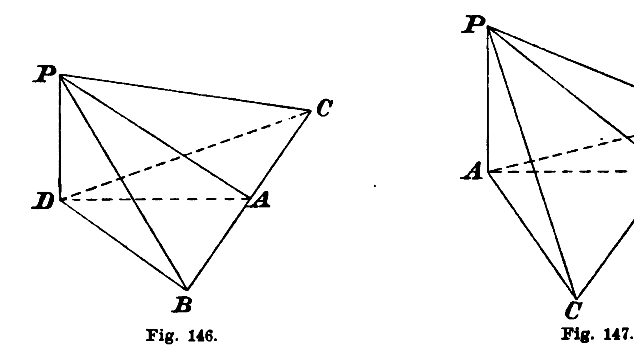


Fig. 146. Fig. 147.

nochmals eine Senkrechte PD, so ist $PD < PA < PC$. Diese Schlußweise gilt, wie sich zeigen wird, für alle Punkte C der Ebene. PD ist der kleinste Abstand, D von allen Punkten der Ebene dem P der nächste. Bevor wir hieran weitere Schlußfolgerungen knüpfen, stellen wir zuerst den wichtigen Begriff des Lotes zur Ebene auf.

Dies geschieht durch folgenden Satz:

Wenn eine Linie eine Ebene so schneidet, daß sie mit zwei Linien, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt gehen, rechte Winkel bildet, so steht sie auf allen durch ihren Fußpunkt gehenden Linien senkrecht.

Der Satz ist grundlegend. Der gewöhnliche Schulbeweis wird nach Euklid oder Legendre durch kongruente Dreiecke geführt. Wir wollen hier einen einfachen rechnerischen Beweis mitteilen. Wir setzen (Fig. 147):

$$PA \perp AB, \quad PA \perp AC, \quad AB = c, \quad BC = a, \quad AC = b;$$
$$PA = f, \quad PB = g, \quad PC = h, \quad CD = m, \quad AD = x, \quad PD = y.$$

Dann ist:

$$\cos(PCB) = \frac{h^2 + a^2 - g^2}{2ah} = \frac{h^2 + m^2 - y^2}{2hm};$$

$$\cos(ACB) = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} = \frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm}.$$

Multipliziert man beiderseits mit $2h$, beziehungsweise $2b$, so wird nach Subtraktion

$$\frac{h^2 - g^2 + c^2 - b^2}{a} = \frac{h^2 - b^2 + x^2 - y^2}{m}.$$

Weil nun

$$PA \perp AC, \quad PA \perp AB,$$

so ist

$$h^2 = b^2 + f^2, \quad g^2 = c^2 + f^2,$$

also

$$y^2 = x^2 + f^2 \quad \text{oder} \quad PA \perp AD.$$

Die Beziehung

$$\frac{m}{a} = \frac{h^2 - b^2 + x^2 - y^2}{h^2 - g^2 + c^2 - b^2}$$

gilt ganz allgemein.

Eine Gerade, welche auf allen durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden einer Ebene senkrecht steht, heißt senkrecht zur Ebene. Der vorige Satz hat den Existenzbeweis geliefert. Wir bezeichnen nun im logischen Schema:

A = Eine Linie p steht senkrecht auf einer Linie a.

B = „ „ p „ „ „ „ „ b, welche durch den Schnittpunkt (a, p) geht.

C = Eine Linie c liegt in der Ebene (a, b).

D = c geht durch den Schnittpunkt (a, p).

E = p steht senkrecht auf c.

Dann heißt der Satz: Wenn A, B, C, D ist, so ist E. Eine Umkehrung dieses Satzes heißt: Wenn A, B, D, E ist, so ist C. In Worten: Wenn drei Linien zu derselben Geraden senkrecht stehen, so liegen sie in einer Ebene. Der Beweis wird indirekt geführt. Dieser Satz ist einer der wichtigsten, um für gewisse Linien zu beweisen, daß sie in einer Ebene liegen. Man kann ihn auch benutzen, um die Ebene anschaulich durch Drehung eines rechten Winkels um einen seiner Schenkel zu erzeugen.

In einem Punkte einer Ebene ist nur eine Senkrechte möglich und von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann man zur Ebene

nur ein Lot fällen. Diese Sätze vervollständigen die Lehre über die Senkrechte zur Ebene. Beide werden indirekt bewiesen. Wären zwei Senkrechte möglich, so würden sie eine Ebene bestimmen; diese Ebene hätte mit der Ebene, von der wir ausgingen, eine Schnittlinie und nun ergibt sich, daß es entweder ungleiche rechte Winkel gibt oder Dreiecke mit zwei rechten Winkeln.

Die Ebene ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei Punkten gleichen Abstand haben. Hieraus ergeben sich Symmetralsätze wie in der Planimetrie. Seien A und B zwei Punkte, C die Mitte der Strecke AB und $\gamma \perp AB$ gehe durch C. Dann hat jeder Punkt der Ebene γ von A und B gleichen Abstand. Liegt der Punkt A' mit A auf derselben Seite von γ, so ist $A'A < A'B$.

Nach diesen Sätzen können wir es unternehmen, von einem gegebenen Punkte aus ein Lot auf eine Ebene zu fällen. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine wichtige Satzgruppe, für welche die Bezeichnung „Satzgruppe der drei Senkrechten" vorgeschlagen ist.

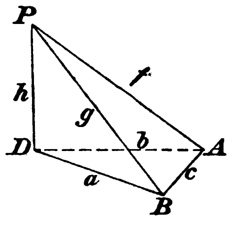


Fig. 148.

Projektion eines Punktes auf eine Ebene ist der Fußpunkt des von ihm auf die Ebene gefällten Lotes. Sei PD (Fig. 148) das von P auf die Ebene ABD gefällte Lot, PB irgend eine andere schiefe Linie, so heißt PB die projizierte, DB ihre Projektion.

Sei nun (Fig. 149) EB eine willkürliche Linie, $CB \perp EB$, $AB \perp EB$ und $CA \perp AB$. Dann ist CA senkrecht zur Ebene ABE. Diese Konstruktion deckt sich mit unsern Ausführungen eingangs § 2.

Wir wollen auch hier wieder eine einfache rechnerische Beziehung an die Spitze stellen und so den Beweis der ganzen Satzgruppe gewinnen. Zum Schluß stellen wir das logische Schema auf und erhalten so die einzelnen Sätze. Es ist (Fig. 149)

$$1)\ e^2 = a^2 + d^2, \qquad 2)\ f^2 = c^2 + d^2, \qquad 3)\ a^2 = b^2 + c^2.$$

Dann folgt

$$4)\ e^2 = f^2 + b^2.$$

Folglich ist $CA \perp AE$, so daß CA auf zwei verschiedenen der Ebene ABE angehörenden Linien senkrecht steht und also Lot zur Ebene ist.

Die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 haben die Eigenschaft, daß jede von ihnen die Folge der drei andern ist. Mithin ist das logische Schema sofort gegeben:

1)	Wenn	2, 3, 4	ist,	so	ist	1),
2)	„	1, 3, 4	„	„	„	2),
3)	„	1, 2, 4	„	„	„	3),
4)	„	1, 2, 3	„	„	„	4).

1) heißt in Worten:

Eine in der Ebene liegende zur Projektion (c) senkrechte Linie (d) ist auch zur projizierten (a) senkrecht.

2) heißt in Worten:

Eine in der Ebene zur projizierten (a) senkrechte Linie ist auch senkrecht zur Projektion (c).

3) hat keine Wichtigkeit.

4) heißt in Worten:

Fällt man von einem außerhalb einer Ebene liegenden Punkte (C) auf eine Gerade (d) in der Ebene eine Senkrechte (a), errichtet im Fußpunkte (B) eine zweite der Ebene angehörende Linie zur Geraden und fällt vom ursprünglichen Punkte auf die zweite Senkrechte eine dritte (b), so ist diese dritte Senkrechte das Lot zur Ebene.

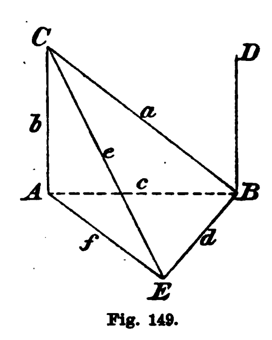


Fig. 149.

Dies ist die **Satzgruppe der drei Senkrechten.** Die hier vorgetragene rechnerische Beweisführung hat vor der schleppenden Methode, welche kongruente Dreiecke und z. T. indirektes Verfahren benutzt, unleugbare Vorzüge.

Wir können nunmehr die Aufgabe lösen: Gegeben ein Tetraeder durch seine sechs Kanten. Man bestimme seine Höhen durch Zeichnung in einer Ebene.

Ein Tetraeder ist die einfachste geschlossene Raumfigur. Man kann sie entstehen lassen durch Verbindung von vier Raumpunkten oder durch Zusammenstellung von vier Ebenen, unter denen parallele nicht vorkommen. Es hat vier Ecken, vier Seiten, sechs Kanten. Die Kanten bezeichnen wir (Fig. 154):

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad DA = f, \quad DB = g, \quad DC = h.$$

Soll von D aus auf die Ebene ABC das Lot gefällt werden, so sei $DE \perp BC$, $FE \perp BC$ in der Ebene ABC, dann ist FE geometrischer Ort für den Fußpunkt des gesuchten Lotes.

Hieraus ergibt sich die Lösung.

Man legt die Dreiecke (Fig. 150) DAB, DAC, DBC nach außen herum in die Ebene ABC und fällt von den drei in der Ebene gewonnenen Punkten D auf die Gegenseiten der umgelegten Dreiecke Senkrechte. Diese drei Senkrechten schneiden sich in dem Fußpunkte des von D auf die Ebene ABC gefällten Lotes.

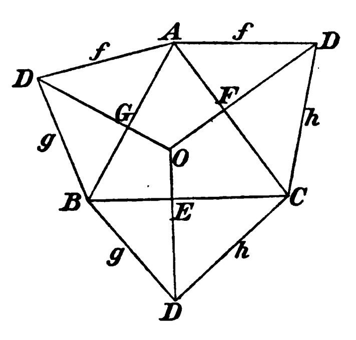


Fig. 150.

Die Konstruktion ist grundlegend und zugleich von großer Schönheit. Über die geometrische Bedeutung des Punktes sagen wir vorgreifend folgendes. Denkt man sich um A mit f, um B mit g, um C mit h als Radien Kugeln beschrieben, so schneiden sich diese Kugeln in D und dem zu D bezüglich der Ebene ABC symmetrisch liegenden Punkte. Die Höhe des Tetraeders DO hat also die Bedeutung, daß DO^2 die gemeinsame Potenz der drei Kugeln bezüglich des Punktes O ist. Dieser Punkt hat gleiche Potenz bezüglich der drei Kugeln, also auch bezüglich der drei Hauptkreise, in denen sie von der Ebene ABC geschnitten werden.

Macht man OE zur Kathete, DE zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist die andere Kathete die Tetraederhöhe DO und ihr Gegenwinkel ist der Neigungswinkel der Ebenen ABC und DBC. Gleiches gilt für DAC und DBC entsprechend. Man findet also durch die angegebene Konstruktion die drei Neigungswinkel auf einen Schlag.

§ 3. Der Parallelismus.

Wenn zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Es mögen (Fig. 149) CA und DB auf derselben Ebene senkrecht stehen. Wir ziehen AB und errichten zu AB in der Ebene die Senkrechte BE. Ziehen wir noch CB, so haben wir Projektion (AB) und Projizierte (CB). EB ist nach Voraussetzung auf BD, nach Zeichnung auf AB, nach dem Satz der drei Senkrechten auf BC senkrecht. Also liegen AB, CB, DB oder die Geraden AC und BD in einer Ebene und sind nunmehr parallel, weil beide von AB unter rechten Winkeln geschnitten werden.

Wir stellen das logische Schema des Satzes auf:

A bezeichne: AC ist senkrecht zur Ebene ABE,
B „ DB „ „ „ „ ABE,
C „ $AC \parallel DB$.

Wenn A und B ist, so ist C.

Eine Umkehrung ist möglich und heißt: Wenn A und C ist, so ist B. In Worten: Wenn von zwei Parallelen eine zu einer Ebene senkrecht steht, so gilt dasselbe von der andern. Der Beweis wird meist indirekt geführt, doch läßt sich leicht ein direkter Beweis aus Figur 149 entnehmen. EB steht senkrecht zur Ebene $CABD$.

Nunmehr können wir das gegenseitige Verhalten von drei Parallelen im Raume untersuchen.

Es seien die Geraden b, c der Geraden a parallel. Wir schneiden die Gerade a durch eine senkrechte Ebene. Dann sind b, c ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht und darum unter sich parallel. Beim Beweise haben wir zuerst die Umkehrung des vorigen Satzes, dann diesen Satz selbst benutzt. Es gilt also der Satz:

Sind zwei Gerade im Raum derselben dritten parallel, so sind sie unter sich parallel.

Um die Parallele a zur Ebene α zu untersuchen, legen wir durch die parallele Gerade a eine willkürliche Ebene β. Sie schneidet die Ebene α in einer parallelen Geraden. Dreht man die Ebene β um die parallele Gerade a, so entsteht in der Ebene α ein System paralleler Geraden. Eine Gerade a ist einer Ebene α parallel, wenn sie einer einzigen in α liegenden Geraden parallel ist.

Zwei Winkel im Raum mit parallelen Schenkeln sind entweder gleich oder ergänzungsgleiche Nebenwinkel.

Der Beweis dieses Satzes wird in den Lehrbüchern auf eine Konstruktion gegründet, welche von den Scheiteln der Winkel ausgehend auf diesen gleiche Paare von Strecken abträgt. So entstehen drei Parallelogramme im Raume als Seitenflächen eines Prismas, und die Gleichheit der Winkel wird durch Kongruenz der Schnittflächen des Prismas erschlossen. Der Beweis wird seiner Anschaulichkeit wegen beibehalten werden müssen, obschon die Konstruktion schwerfällig ist.

Nunmehr können wir den Flächenwinkel durch den ebenen Neigungswinkel ersetzen, sobald es sich um Größenvergleichungen handelt. Wir erklären:

Neigungswinkel zweier Ebenen ist der ebene Winkel, den zwei in demselben Punkte der Durchschnittskante in den Ebenen zu der Durchschnittskante errichtete Senkrechte bilden.

Ein Flächenwinkel wird von zwei Halbebenen gebildet. Ihm entspricht ein eindeutig bestimmter Neigungswinkel, den die in den Halbebenen liegenden zur Durchschnittskante senkrechten Strahlen bilden. Dieser Neigungswinkel ist das Maß des Flächenwinkels.

Denn ist ein Flächenwinkel gegeben und sein Neigungswinkel α bestimmt, so findet man durch Konstruktion eines Winkels $\frac{n\alpha}{m}$ sofort auch einen Flächenwinkel, welcher zu dem ursprünglichen Flächenwinkel in derselben Größenbeziehung steht.

Zwei Ebenen α, β mögen sich in der Geraden c schneiden. Dann sind zwei Ebenen γ und γ' angebbar, welche durch c gehen und den Flächenwinkel bzw. den zugehörigen Nebenwinkel der Ebenen α, β halbieren. γ, γ' enthalten die Punkte des Raumes, welche von α und β gleichen Abstand haben.

Wir haben nunmehr das Recht, auch von dem Winkel zweier windschiefen Geraden a, b zu reden. Durch einen willkürlichen Punkt A auf a legen wir $a' \parallel b$. Dann ist der Winkel (a, a') der Winkel der beiden Windschiefen. Die Berechtigung dieser Benennung ergibt sich wie folgt. Nähme man statt A einen andern Punkt A' und zöge durch ihn $a'' \parallel b$, so wäre $\sphericalangle (a'', a) = (a', a)$. Nähme man einen Punkt B' auf b und zöge durch ihn $b' \parallel a$, so wäre $\sphericalangle (b, b') = (a, a')$, weil die Schenkel paarweise parallel sind. Der so erklärte Winkel ist also lediglich durch die Richtung der Geraden a, b bestimmt und verdient daher die Bezeichnung: Winkel der Geraden a, b.

Für zwei windschiefe Gerade läßt sich immer eine dritte angeben, welche beide senkrecht schneidet. Das Stück zwischen den Schnittpunkten ist der kleinste Abstand eines Punktes der einen Geraden von einem Punkte der andern und heißt daher kurz: Abstand der beiden Windschiefen.

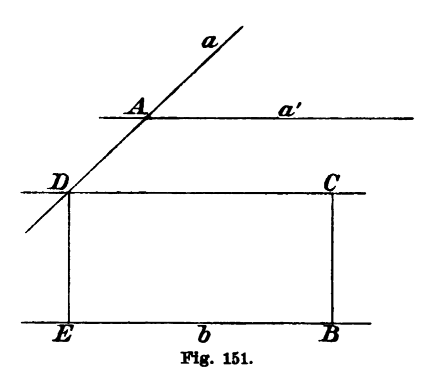


Fig. 151.

Zum Erweis der Richtigkeit dieser Aufstellungen legen wir durch die Gerade a (Fig. 151) im Punkte A eine Parallele a' zur Geraden b. Dann ist die Ebene (aa') parallel zur Geraden b. Nunmehr fällen wir von einem beliebigen Punkte B der Geraden b eine Senkrechte BC auf (aa') und ziehen $DC \parallel a$ in (aa'). In D ziehen wir $DE \parallel BC$. Sie liegt folglich in der Ebene DCB und schneidet also b und zwar senkrecht. Ebenso schneidet sie a senkrecht, weil $DE \perp (aa')$. Verbindet man die beliebigen Punkte A, B, so ist $AB > CB$.

Die vorstehende Aufgabe hat uns mit der senkrechten Ebene bekannt gemacht. Es ist $DCBE \perp (aa')$. Wir wollen diesem Begriffe jetzt näher treten.

Eine Halbebene steht auf einer andern Halbebene senkrecht, wenn sie mit ihr einen rechten Flächenwinkel bildet, wenn also der zugehörige Neigungswinkel ein rechter ist. Diese Erklärung folgt aus unsern Erörterungen über den allgemeinen Flächenwinkel.

Folgende Lehrsätze ergeben sich aus dieser Erklärung:

1. Wenn eine Ebene α einen Punkt A enthält und in A eine zu α senkrechte Gerade a errichtet ist, so ist jede durch a gelegte Ebene $\beta \perp \alpha$.

2. Ist $a \perp \alpha$ und $b \perp \alpha$, so ist die Ebene $(ab) \perp \alpha$.

3. Ist $\alpha \perp \beta$ und die α angehörende Linie $a \perp \beta$, so ist a auch senkrecht zur Durchschnittskante (α, β).

4. Ist $\alpha \perp \beta$ und A ein Punkt von α, so liegt die von A zu β gefällte Senkrechte a in α und es ist $a \perp (\alpha, \beta)$.

5. Eine in (α, β) zu β errichtete Senkrechte a liegt in α.

Diese Sätze verdienen keine ausführliche Behandlung. Vielleicht ist folgende Zusammenstellung nicht überflüssig:

1) Gerade a $\perp$ Ebene β,

2) „ a in „ α,

3) „ a $\perp$ Linie (α, β),

4) Ebene α $\perp$ Ebene β.

Wenn 1) und 2) ist, so ist auch 3) und 4),
wenn 1), 3) „ 4) „ „ „ „ 2).

§ 4. Die dreiseitige Ecke.

Zwei Ebenen schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind, in einer Geraden. Drei Ebenen schneiden sich, wenn die dritte weder einer der andern noch deren Schnittlinie parallel ist noch die Schnittlinie selbst enthält, in einem Punkt. Diesen Fall fassen wir jetzt genauer ins Auge. Um die Vorstellung für den Anfänger zu erleichtern, geht man vielfach von den drei Schnittlinien aus, die in dem gemeinsamen Punkte zusammentreffen. Allein auch diese Vorstellung ist für den Anfang noch zu schwierig, weil sie den Begriff des Unbegrenzten mit sich führt.

Wir betrachten also das einfachste geschlossene Körpergebilde, das Tetraeder. Es hat vier Ecken, die wir mit den Buchstaben A, B, C, D bezeichnen. Die sechs Kanten bezeichnen wir wie oben:

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c, \quad AD = f, \quad BD = g, \quad CD = h \text{ (Fig. 154).}$$

a und f, b und g, c und h sind **Gegenkanten** und gegenseitig **windschief**. In D haben wir drei ebene Winkel, die **Seiten** der Ecke D, nämlich (fg), (fh), (gh). In D haben wir drei Flächenwinkel, die **Winkel** der Ecke D, nämlich (f), (g), (h). Der Winkel (f) liegt der Seite (gh) gegenüber. Ebenso ist es bei den andern: (g) liegt (fh), h liegt (fg) gegenüber.

Betrachten wir nun das Viereck $BGOE$ (Fig. 150). Es ist

$$BG = g \cos(gc), \quad BE = g \cos(ga);$$

folglich

$$GO = g \frac{\cos(ga) - \cos(gc)\cos(ac)}{\sin(ac)}$$

[§ 5, Gl. (1), weiter unten S. 337].

Nun ist der Flächenwinkel an der Kante (c) gegeben durch (S. 330)

$$\cos(c) = \frac{GO}{GD} = \frac{\cos(ga) - \cos(gc)\cos(ac)}{\sin(gc)\sin(ac)}.$$

Diese einfachste Ableitung des **Kosinussatzes** ergibt sich unmittelbar aus Fig. 150 und bekommt, wenn man die Seiten und Winkel in hergebrachter Weise mit a, b, c, A, B, C bezeichnet, das Aussehen:

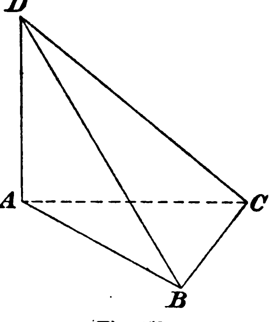


Fig. 152.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \tag{1}$$

Wenn man in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete GO, dessen Hypotenuse DG ist, die andere Kathete H nennt, so ist H auch in dem entsprechenden Dreieck mit der Kathete OE und der Hypotenuse ED vorhanden. Es ist:

$$DG = g \sin(gc), \quad H = g \sin(gc)\sin(c),$$
$$DE = g \sin(ga), \quad H = g \sin(ga)\sin(a).$$

Daher

$$\sin(gc)\sin(c) = \sin(ga)\sin(a),$$

oder in den zweckmäßigen Bezeichnungen von (1):

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}. \tag{2}$$

Dieser Satz heißt der **Sinussatz**.

Den Kosinussatz beweist man auch, indem man eine Kante der Ecke durch eine senkrechte Ebene schneidet. Sei (Fig. 152)

$$DA \perp AC, \quad DA \perp AB,$$
$$\sphericalangle ADB = c, \quad BDC = a, \quad ADC = b,$$
$$\sphericalangle CAB = A.$$

Dann ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot DC \cdot \cos a.$$

Da

$$DB^2 - AB^2 = CD^2 - AC^2 = AD^2,$$

so wird

$$AD^2 - BD \cdot DC \cdot \cos a + AB \cdot AC \cdot \cos A = 0,$$

also nach Division durch $DB \cdot DC$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

Wenn $A = 90^0$, so folgt:

(3) $$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Dies ist der pythagoreische Satz der sphärischen Trigonometrie.

Der Zusammenhang der Lehre von der dreiseitigen Ecke mit der Trigonometrie oder vielmehr der Geometrie der Kugelfläche ist leicht einzusehen. In der Ecke D mögen die Strecken f, g, h zusammenlaufen. Wir beschreiben um D eine Kugel, welche f, g, h in den Punkten A, B, C schneiden möge. Dann sind die Kreisbogen AB, BC, AC genau entsprechend den Seiten (daher dieser Name) (fg), (gh), (fh) der Ecke. Die Flächenwinkel (f), (g), (h) sind ferner genau gleich den ebenen Winkeln, unter denen die Bogen AB, AC in A usw. zusammentreffen.

Für das rechtwinklige Dreieck ergibt der Sinussatz

(4) $$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \sin C = \frac{\sin c}{\sin a}.$$

Hieraus zieht man mit Hülfe von (3):

$$\cos B = \frac{\cos b \sin c}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\cos c \sin b}{\sin a},$$

und nach Division im Zähler und Nenner durch $\cos a$

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a},$$

mithin

(5) $$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

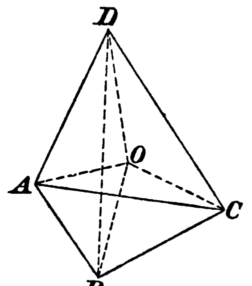


Fig. 153.

Kehren wir zur allgemeinen Ecke zurück. O sei der Mittelpunkt der Umkugel (Fig. 153), also $OA = OB = OC = OD$. Fällt man von O auf die vier Begrenzungsdreiecke des Tetraeders die Senkrechten, so treffen diese die Mittelpunkte der den Begrenzungsdreiecken umschriebenen Kreise.

Dieses Verhalten benutzen wir zu einer Lösung der folgenden Aufgabe. Wir machen (Fig. 155) $DA = DB = DC = f$. Dann fällen wir das Lot DO zur Ebene ABC. O liegt dann im Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC, also ist $AO = BO = CO = r$ und die Dreiecke DOA, DOB, DOC sind kongruent. Umgekehrt kann man vom Dreieck ABC ausgehen. Bestimmt man für ein beliebiges Dreieck ABC den Mittelpunkt des Umkreises O, errichtet in O die Senkrechte zur Ebene ABC und zieht DA, DB, DC, so werden diese Strecken gleich.

Hiernach können wir die Aufgabe lösen, aus drei gegebenen Seiten α, β, γ eine dreiseitige Ecke zu bestimmen. Wir stellen drei gleichschenklige Dreiecke her aus zwei gleichen Seiten f und den von ihnen gebildeten Winkeln α, β, γ. Aus den Gegenseiten a, b, c ist dann ein ebenes Dreieck zu bilden, welches durch den Mittelpunkt seines Umkreises die Ecke völlig bestimmt. Damit die Aufgabe lösbar sei, muß aus den drei Stücken $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ als Seiten sich ein Dreieck bilden lassen.

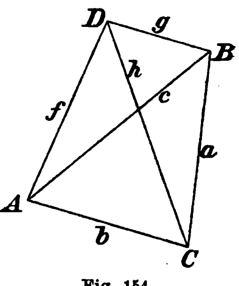


Fig. 154.

Ein einfacher Schulbeweis lehrt, daß dies auf die Bedingung zurückkommt: es muß $\alpha < \beta + \gamma$ und zugleich $\alpha > \beta - \gamma$ für alle drei Winkel α, β, γ gelten. Dem Beweise kann man folgende Form geben. Sei $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$. Wir machen (Fig. 154)

$$\sphericalangle BAC = \alpha, \quad \sphericalangle BAD = \beta, \quad \sphericalangle DAC = \gamma.$$

Wir drehen BAC um AC, bis B in die Ebene DAC gelangt, wo B auf E fallen möge. Wir legen durch AC die zu BAC und EAC gehörende Halbierungsebene des Flächenwinkels. Sie steht zu BE in der Mitte senkrecht. D liegt mit E auf derselben, mit B auf entgegengesetzter Seite der Halbierungsebene. Folglich ist $DB > DE$. Die Dreiecke DAE und DAB haben zwei Seiten gleich, $AD = AD$, $AE = AB$. Folglich ist das Größenverhältnis der dritten Seiten auf die Winkel übertragbar, also $DAE < DAB$, oder

$$\gamma - \alpha < \beta.$$

Für die dreiseitige Ecke sind folgende Sätze der Planimetrie sofort übertragbar:

Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Aus beiden kann man wie in der ebenen Planimetrie folgern,

daß die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte und erhält so einen neuen Beweis des vorigen Satzes.

Die ganze Satzgruppe ist allen drei Geometrien gemeinsam: der Euklidischen, sphärischen und pseudosphärischen.

Die Nebenecke der Ecke a, b, c hat die Seiten $180^0 - a$, $180^0 - b$, c. Daher zieht man aus dem vorigen Satze die Folgerung

$$360^0 > a + b + c.$$

Dieser Beweis setzt das Parallelenaxiom nicht voraus. Der gewöhnliche Schulbeweis benutzt den Satz von der Winkelsumme des ebenen Dreiecks und empfiehlt sich durch größere Allgemeinheit. In der Tat muß bei der Lehre von den regelmäßigen Körpern auch die mehrseitige Ecke berücksichtigt werden, und darum tut man gut, den Schulbeweis zu geben. Für den Unterricht ist die Ecke mit einspringenden Seiten nicht wichtig. Deshalb kann ein dritter Beweis gegeben werden. Man schneide die Ebenen der Ecke durch eine weitere Ebene. Dies läßt sich nach der Voraussetzung immer so ausführen, daß in der Ebene ein geschlossenes Vieleck mit hohlen Winkeln entsteht. Von der Ecke fällen wir auf die schneidende Ebene eine Senkrechte und projizieren die Kanten der Ecke auf die Ebene. Bei der Projektion vergrößern sich sämtliche Seiten. Weil nun die Summe der vergrößerten Seiten 360^0 ist, so muß die Summe der ursprünglichen Seiten kleiner sein als 360^0.

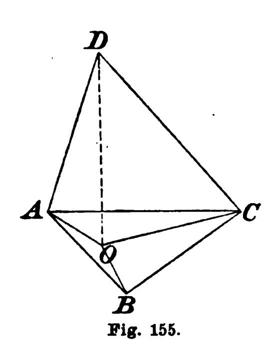


Fig. 155.

Daß die Seiten sich bei der Projektion vergrößern, zeigt man durch Umlegung des Dreiecks DAB (Fig. 155) um AB als Achse in die Ebene ABC. Es wird dann $\sphericalangle AOB > ADB$.

§ 5. Die Polarecke.

In der Ebene spielt das rechtwinklige Kreisviereck eine beachtenswerte Rolle. Sei (Fig. 156)

$$\sphericalangle BAC = \lambda, \quad DB \perp AB, \quad DC \perp AC$$

und

$$AB = a, \quad AC = b,$$
$$DB = y, \quad DC = x.$$

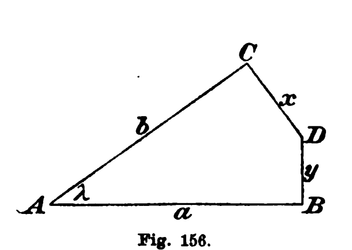


Fig. 156.

Durch Projektion von A, C, D auf AB ergibt sich:

$$b \cos \lambda + x \sin \lambda = a,$$

also

(1) $$x = \frac{a - b\cos\lambda}{\sin\lambda}; \quad y = \frac{b - a\cos\lambda}{\sin\lambda}.$$

Die zweite Gleichung folgt durch Vertauschung aus der ersten oder durch Projektion auf AC.

Im Raum ergibt sich für die dreiseitige Ecke eine durchaus entsprechende Betrachtung, die zur Polarecke führt.

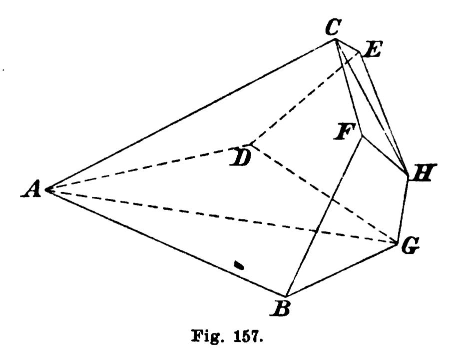


Fig. 157.

Wir greifen im hohlen Winkelraume der Ecke (Fig. 157) einen Punkt H heraus und fällen von ihm drei Senkrechte auf die Seiten HF, HG, HE und drei Senkrechte auf die Kanten HB, HC, HD. Dann ist

$$ED \perp AD \quad \text{und} \quad GD \perp AD,$$

also $\sphericalangle EDG$ der Neigungswinkel der Ebenen CAD und BAD. Ebenso sind FBG und FCE Neigungswinkel. Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\sphericalangle CAD = a, \quad CAB = b, \quad DAB = c,$$

so wird

$$\sphericalangle EDG = B, \quad FBG = A, \quad ECF = C.$$

In unserer Figur sind sechs Kreisvierecke entstanden

$$CADE, \quad CABF, \quad DABG;$$

$$FBGH, \quad EDGH, \quad CFHE.$$

Sie scheiden die acht Buchstaben der Figur in drei Gruppen zu je vier, wie diese Zusammenstellung zeigt. Auch ein gegenseitiges Entsprechen der Buchstaben ergibt diese Anordnung:

$$A, H; \quad B, E; \quad C, G; \quad D, F.$$

In H findet sich eine dreiseitige Ecke, die Polarecke. Ihre Seiten sind:

$$\sphericalangle FHG = 180^0 - A; \quad \sphericalangle EHG = 180^0 - B,$$
$$\sphericalangle EHF = 180^0 - C.$$

Ihre Winkel sind:

$$\sphericalangle CED = 180^0 - a, \quad \sphericalangle CFB = 180^0 - b,$$
$$\sphericalangle DGB = 180^0 - c.$$

Wenden wir den Kosinussatz auf die Polarecke an, so wird:

$$\cos(180^\circ - a) = \frac{\cos(180^\circ - A) - \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C)}{\sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)};$$

(2) $$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Dies ist der polare Kosinussatz. Er löst die Aufgabe, aus den drei Winkeln die drei Seiten zu bestimmen. Erteilt man ihm die Form

(3) $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

so löst er die Aufgabe, aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln den dritten Winkel zu bestimmen. Zugleich führt er die betreffende Dreiecksaufgabe: a, B, C sind gegeben, gesucht die übrigen Stücke, auf die Aufgabe zurück: A, B, C sind gegeben.

In diesem Zusammenhange stellen wir fest, daß die entsprechenden Aufgaben: gegeben die drei Seiten a, b, c und gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel b, c, A durch den Kosinussatz in seinen beiden Formen gelöst werden:

(4) $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Sämtliche vier Aufgaben führen zu eindeutigen Lösungen, die man auch sehr schön durch Zeichnung in einer Ebene erhalten kann, wie wir weiter unten sehen werden. Die zu den Seiten a, b, c gehörende Ecke ist aber nicht eindeutig bestimmt. Um dies einzusehen, erinnern wir uns der Scheitelecke. Sie stimmt mit der ursprünglichen in allen Seiten und Winkeln überein, ist aber jener nicht kongruent. Auf der Kugelfläche ist ebenso das diametrale Gegendreieck (Antipodendreieck) dem ursprünglichen symmetrisch, aber nicht kongruent.

Stellen wir nunmehr die aus drei unter den sechs Bestimmungsstücken einer dreiseitigen Ecke möglichen einfachen Aufgaben zusammen. Wir finden:

1) 3 Seiten, 0 Winkel. Aufgabe: a, b, c gegeben.
   Lösung durch Kosinussatz der Urecke.

2) 2 Seiten, 1 Winkel. Aufgabe: b, c, A.
   Lösung durch Kosinussatz der Urecke.

3) 2 Seiten, 1 Winkel. Aufgabe: b, c, B.
   Lösung s. unten.

4) 1 Seite, 2 Winkel. Aufgabe: a, B, C.
   Lösung durch Kosinussatz der Polarecke.

5) 1 Seite, 2 Winkel. Aufgabe: a, A, B.
Lösung s. unten.

6) 0 Seiten, 3 Winkel. Aufgabe: A, B, C.
Lösung durch Kosinussatz der Polarecke.

Die noch ausstehenden Aufgaben 3) und 5) sind polare Nebenaufgaben. Denn b, c, B entspricht polar B, C, b, was mit a, A, B stimmt.

Sei (Fig. 157a)

$$CE \perp BDAE, \quad BE \perp DB,$$
$$EA \perp AD,$$

dann ist

$$CB \perp DB, \quad CA \perp DA,$$
$$\sphericalangle CDB = b, \quad \sphericalangle CDA = c;$$

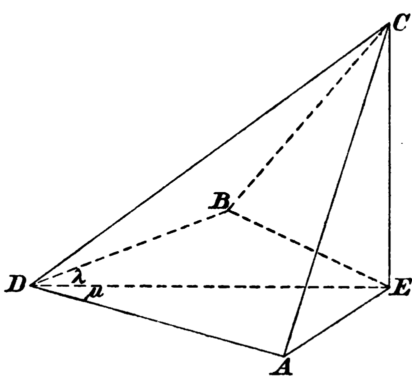


Fig. 157a.

dann ist

$$\sphericalangle CAE = B, \quad \sphericalangle CBE = C.$$

Es ist, wenn $CE = p$,

$$CB = p \sin b, \quad CE = p \sin b \sin C,$$
$$CA = p \sin c, \quad CE = p \sin c \sin B.$$

Also ist

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B.$$

Diese Beziehung ist der Sinussatz, wie wir schon wußten. Die vier Stücke b, c, B, C sind also bekannt. Betrachten wir nun das Kreisviereck $BDAE$. Es ist

$$DA = p \cos b, \quad DB = p \cos c,$$
$$BE = p \sin b \cos C, \quad AE = p \sin c \cos B,$$

folglich

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin b \cos C}{\cos c}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\sin c \cos B}{\cos b},$$
$$a = \lambda + \mu.$$

Die Aufstellung einer Formel für $\operatorname{tg}(\lambda + \mu)$ ergibt sich hieraus sofort, sie lohnt jedoch nicht die Mühe.

Hiermit sind die beiden Aufgaben 3) und 5) gelöst. Die Zeichnung in einer Ebene folgt genau vorstehender Rechnung.

Man kann diese Aufgaben auch rein rechnerisch lösen. Der Kosinussatz liefert die Gleichung

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Diese hat, wenn b, c, B gegeben sind, nur eine Unbekannte, nämlich a. Die Lösung vollzieht sich wie folgt. Die Gleichung

$$A\cos x + B\sin x = C$$

hat die Lösung

$$\sin x = \frac{BC + A\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}, \quad \cos x = \frac{AC - B\sqrt{A^2+B^2-C^2}}{A^2+B^2}.$$

Bei Anwendung dieser Methode stößt man auf ein sehr merkwürdiges Ergebnis. Die Wurzeln werden rational und die Vorzeichen können demnach eindeutig bestimmt werden. Es ist

$$(5)\quad \begin{cases} \sin a = \dfrac{\cos b \sin c \cos B + \cos c \sin b \cos C}{1 - \sin^2 b \sin^2 C}, \\ \cos a = \dfrac{\cos b \cos c - \sin b \sin c \cos B \cos C}{1 - \sin^2 b \sin^2 C}. \end{cases}$$

Bildet man $\cos a + i \sin a$, so entsteht im Zähler das Produkt

$$(\cos b + i \sin b \cos C)(\cos c + i \sin c \cos B).$$

Im Nenner ist

$$1 - \sin^2 b \sin^2 C = \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 C,$$

$$1 - \sin^2 c \sin^2 B = \cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 B.$$

Also ist

$$\cos a + i \sin a = \frac{\cos c + i \sin c \cos B}{\cos b - i \sin b \cos C} = \frac{\cos b + i \sin b \cos C}{\cos c - i \sin c \cos B}.$$

In reeller Form folgt daraus

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C = \cos c,$$

$$\sin a \cos b = \sin c \cos B + \cos a \sin b \cos C.$$

Diese Formeln stehen zu wichtigen Fragen in Beziehung. Um sie noch in anderer Weise zu bestätigen, schlagen wir folgendes Verfahren ein.

Seien a, b, c irgend welche reelle Größen mit der alleinigen Beschränkung, daß entweder alle kleiner als Eins oder alle größer als Eins ihrem absoluten Werte nach sein sollen. Dann sei:

$$(6)\quad \begin{cases} A = \dfrac{a - bc}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}, \quad B = \dfrac{b - ac}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2}}, \\ C = \dfrac{c - ab}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}. \end{cases}$$

Sämtlichen Wurzeln erteilen wir ihren positiven Wert. Nach den gemachten Annahmen sind A, B, C reell. Um bestimmte Vorstellungen zu baben, sei jetzt $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$. Es ist

$$\sqrt{1-A^2} = \frac{\sqrt{1-a^2-b^2-c^2+2abc}}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}},$$

$$\sqrt{1-B^2} = \frac{\sqrt{1-a^2-b^2-c^2+2abc}}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2}},$$

$$\sqrt{1-C^2} = \frac{\sqrt{1-a^2-b^2-c^2+2abc}}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die neuen Wurzelgrößen das gleiche Vorzeichen haben, nämlich dasjenige der neuen im Zähler rechts bei allen vorkommenden Wurzel. Reell sind sie, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist, also wenn

$$\left(\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}-bc+a\right)\left(\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}+bc-a\right) > 0,$$

also sicher, wenn

$$\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}+bc > a > bc-\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}.$$

Es ist

$$(7)\qquad \frac{\sqrt{1-A^2}}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\sqrt{1-a^2-b^2-c^2+2abc}}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}.$$

Ferner ist

$$A+BC = a\frac{1-a^2-b^2-c^2+2abc}{(1-a^2)\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}},$$

daher

$$(8)\qquad a = \frac{A+BC}{\sqrt{1-C^2}\sqrt{1-B^2}};$$

und ebenso nach Vertauschung:

$$b = \frac{B+AC}{\sqrt{1-A^2}\sqrt{1-C^2}},\quad c = \frac{C+AB}{\sqrt{1-A^2}\sqrt{1-B^2}}.$$

Ferner ergibt sich

$$bB\sqrt{1-c^2}+cC\sqrt{1-b^2} = \frac{b^2+c^2-2abc}{\sqrt{1-a^2}};$$

$$1-(1-b^2)(1-C^2) = 1-\frac{1-a^2-b^2-c^2+2abc}{1-a^2} = \frac{b^2+c^2-2abc}{1-a^2}.$$

Folglich

$$(9)\qquad \sqrt{1-a^2} = \frac{bB\sqrt{1-c^2}+cC\sqrt{1-b^2}}{1-(1-b^2)(1-C^2)}.$$

Ebenso folgt:

$$bc-\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}\cdot BC = \frac{a(b^2+c^2-2abc)}{1-a^2},$$

$$(10)\qquad a = \frac{bc-\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}\cdot BC}{1-(1-b^2)(1-C^2)}.$$

Aus (9) und (10) erhält man

$$(a+i\sqrt{1-a^2})(b-i\sqrt{1-b^2}C)=c+i\sqrt{1-c^2}B.$$

Daraus folgt u. a.

$$ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}C=c.$$

Diese Entwicklungen zeigen, daß aus dem Kosinussatz die sämtlichen bis jetzt entwickelten Formeln ohne irgendwelche geometrische Betrachtungen abgeleitet werden können. Setzen wir statt a, b, c, A, B, C die Kosinus, also $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, so kommen alle bis jetzt entwickelten Formeln heraus. So ergibt sich (5) aus (9) und (10).

Noch zwei wichtige Bemerkungen fügen wir bei. Die erste ist, daß wir das System (6) der drei Gleichungen mit den Unbekannten a, b, c gelöst haben. Die Lösungen sind (8). Zweitens haben wir die Realitätsbedingung erhalten:

$$\cos(b-c)>\cos a>\cos(b+c)$$

oder

$$b-c<a<b+c.$$

Auch dieses Ergebnis ist lediglich eine Rechnungstatsache aus den Voraussetzungen (6).

Wir können nun auch das rechtwinklige sphärische Dreieck in einfachster Weise untersuchen. Zu diesem Zweck setzen wir

(11) $$a=bc.$$

Dann wird

$$A=0,\quad B=\frac{b\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-b^2c^2}},\quad \sqrt{1-B^2}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-b^2c^2}},$$

$$C=\frac{c\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1-b^2c^2}},\quad \sqrt{1-C^2}=\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-b^2c^2}}.$$

In diesen Gleichungen erkennen wir die Grundlage zur Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist

$$BC=\frac{bc\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}{1-b^2c^2},\quad \sqrt{1-B^2}\sqrt{1-C^2}=\frac{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}{1-b^2c^2},$$

also

$$bc=a=\frac{BC}{\sqrt{1-B^2}\sqrt{1-C^2}},\quad b=\frac{B}{\sqrt{1-C^2}},\quad c=\frac{C}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Man erkennt außer den früheren Formeln:

(12) $$\begin{cases} \operatorname{tg} B=\dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin c},\quad \operatorname{tg} C=\dfrac{\operatorname{tg} c}{\sin b},\quad \cos b\cos c=\cos a,\\ \cos a=\cot B\cot C,\quad \cos b=\dfrac{\cos B}{\sin C},\quad \cos c=\dfrac{\cos C}{\sin B}.\\ \sin B=\dfrac{\sin b}{\sin a},\quad \cos B=\dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}.\end{cases}$$

Zum Schluß wollen wir noch eine wichtige Bemerkung machen. Die Gleichungen (6) behalten ihre volle Gültigkeit bei den Annahmen: a, b, c reell und

$$a^2 > 1, \quad b^2 > 1, \quad c^2 > 1.$$

Wir schreiben sie dann in der Form:

$$(13) \quad A = \frac{bc - a}{\sqrt{b^2-1}\sqrt{c^2-1}}, \quad B = \frac{ac - b}{\sqrt{a^2-1}\sqrt{c^2-1}}, \quad C = \frac{ab - c}{\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}}$$

Die Wurzeln nehmen wir positiv. Es wird

$$(14) \qquad \sqrt{1 - A^2} = \frac{\sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc}}{\sqrt{b^2-1}\sqrt{c^2-1}},$$

ebenso die entsprechenden.

Die drei Größen $\sqrt{1-A^2}$, $\sqrt{1-B^2}$, $\sqrt{1-C^2}$ werden reell, wenn

$$\sqrt{b^2-1}\sqrt{c^2-1} - bc + a \quad \text{und} \quad \sqrt{b^2-1}\sqrt{c^2-1} + bc - a$$

dasselbe Vorzeichen haben. Man findet weiter die (8) entsprechende Formel:

$$(15) \qquad a = \frac{A + BC}{\sqrt{1-B^2}\sqrt{1-C^2}}.$$

Setzt man nun statt a, b, c, A, B, C ein die Größen $\mathfrak{Cof}\, a$, $\mathfrak{Cof}\, b$, $\mathfrak{Cof}\, c$, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, so erhält man

$$(16) \qquad \cos A = \frac{\mathfrak{Cof}\, b \cdot \mathfrak{Cof}\, c - \mathfrak{Cof}\, a}{\mathfrak{Sin}\, b \cdot \mathfrak{Sin}\, c}, \quad \mathfrak{Cof}\, a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}.$$

Die Zeichen $\mathfrak{Cof}\, a$, $\mathfrak{Sin}\, a$ sind hyperbolische Funktionen und gehorchen den Gleichungen

$$\mathfrak{Cof}\, a = \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a}), \quad \mathfrak{Sin}\, a = \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a}).$$

$$\mathfrak{Cof}^2\, a - \mathfrak{Sin}^2\, a = 1.$$

Aus (14) folgt

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\mathfrak{Sin}\, a}{\mathfrak{Sin}\, b}.$$

Ihre geometrische Deutung finden diese Formeln in der hyperbolischen Geometrie, welche der sphärischen gegenübergestellt werden kann.

Für das rechtwinklige Dreieck setzen wir in (13) $a = bc$ und erhalten dann

$$(17) \quad \begin{cases} A = 0, \quad B = \dfrac{b\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{b^2c^2-1}}, \quad C = \dfrac{c\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{b^2c^2-1}}, \\ \sqrt{1-B^2} = \dfrac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{b^2c^2-1}}, \quad \sqrt{1-C^2} = \dfrac{\sqrt{c^2-1}}{\sqrt{b^2c^2-1}}. \end{cases}$$

Wenn wir nun bilden:

$$BC - \sqrt{1 - B^2}\sqrt{1 - C^2} = \frac{(bc - 1)\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{c^2 - 1}}{b^2c^2 - 1},$$

so wird nach geschehener Umsetzung $\cos B$, $\cos C$ für B, C links $\cos(B + C)$ erhalten. Rechts ist das Ergebnis positiv, also ist $B + C$ ein spitzer Winkel und die Winkelsumme des rechtwinkligen Dreiecks kleiner als zwei Rechte, ein Ergebnis, was sich sofort auf jedes Dreieck ausdehnen läßt. Bilden wir die entsprechenden Formeln für das sphärische Dreieck [Formel (11)f.], so wird

$$BC - \sqrt{1 - B^2}\sqrt{1 - C^2} = \frac{(bc - 1)\sqrt{1 - b^2}\sqrt{1 - c^2}}{1 - b^2c^2}$$

und die rechte Seite ist nun negativ, also nach Umsetzung erhalten wir das Ergebnis, welches wir schon für jedes sphärische Dreieck bewiesen haben, daß die Winkelsumme im rechtwinkligen sphärischen Dreieck größer ist als zwei Rechte.

Fassen wir das Gesagte zusammen. Aus der Formel

$$A = \frac{a - bc}{\sqrt{1 - b^2}\sqrt{1 - c^2}},$$

der zwei andere gleichgebaute gegenüberstehen, läßt sich die ganze sphärische Trigonometrie entwickeln. Man braucht nur $a^2 < 1$, $b^2 < 1$, $c^2 < 1$ anzunehmen und zu beachten, daß

$$1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc$$

positiv sein muß. Aus den gewonnenen Rechnungsergebnissen erhält man die Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man a, b, c durch $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ ersetzt. Ebenso hat man A, B, C durch $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ zu ersetzen.

Aus der Formel

$$A = \frac{bc - a}{\sqrt{b^2 - 1}\sqrt{c^2 - 1}}$$

und zwei gleichgebauten kann man durch bloße Umformung die Gleichungen der Trigonometrie für die hyperbolische Geometrie entwickeln. Die a, b, c sind positiv, jede größer als 1 und es ist

$$1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc$$

positiv. Die Umsetzung der Rechnungsergebnisse in die Formeln dieser Trigonometrie geschieht durch die Vertauschung von a, b, c mit $\operatorname{Cos} a$, $\operatorname{Cos} b$, $\operatorname{Cos} c$, und gleichzeitig von A, B, C mit $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

Vorstehende Einführung in die Lobatschewskijsche Geometrie zeigt die völlige Widerspruchslosigkeit dieses Lehrgebäudes. Jedem Satze entspricht ein auf der Kugelfläche geltender Satz.

Nehmen wir im sphärischen Kosinussatz die Seiten a, b, c so klein an, daß höhere Potenzen als die zweite vernachlässigt werden dürfen, ebenso Größen wie b^2c^2 usw., so wird

$$\cos a = 1 - \tfrac{1}{2}a^2, \quad \cos b = 1 - \tfrac{1}{2}b^2, \quad \cos c = 1 - \tfrac{1}{2}c^2,$$
$$\sin a = a, \quad \sin b = b, \quad \sin c = c.$$

Dann folgt

$$\cos A = \frac{1 - \frac{1}{2}a^2 - (1 - \frac{1}{2}b^2)(1 - \frac{1}{2}c^2)}{bc},$$

also

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dies ist der Kosinussatz der ebenen Trigonometrie. Somit gilt auf der Kugel für kleine Dreiecke die Euklidische Geometrie.

Dasselbe Ergebnis liefert die hyperbolische Trigonometrie, wenn die betrachteten Dreiecke hinreichend klein sind.

§ 6. Zahlenbeispiele.

Wir nehmen ein Tetraeder $ABCD$ und bezeichnen seine Kanten wie dies in Fig. 154, S. 335 geschehen ist. Nehmen wir nun für die Kanten beliebige Zahlwerte, so können wir die zwölf ebenen Winkel und die sechs Flächenwinkel berechnen, welche sich dann für die vier Ecken zu je einer dreiseitigen Ecke mit drei Seiten und drei Winkeln anordnen lassen. Es sei

$$a = 4, \quad b = 5, \quad c = 6, \quad f = 7, \quad g = 8, \quad h = 9.$$

1) Dreieck ABC.

$$\cos(ac) = \frac{9}{16}, \quad \cos(ab) = \frac{1}{8}, \quad \cos(bc) = \frac{3}{4}.$$

$$\left.\begin{aligned}(ac) &= 55^0\,46'\,16'',06\\ (ab) &= 82^0\,49'\,\;9'',28\\ (bc) &= 41^0\,24'\,34'',63\end{aligned}\right\}+$$

Zur Probe: $180^0 - 0'',03$.

2) Dreieck DAB.

$$\cos(fg) = \frac{11}{16}, \quad \cos(fc) = \frac{1}{4}, \quad \cos(gc) = \frac{17}{32}.$$

$$\left.\begin{aligned}(fg) &= 46^0\,34'\,\;2'',87\\ (fc) &= 75^0\,31'\,20'',96\\ (gc) &= 57^0\,54'\,36'',19\end{aligned}\right\}+$$

Zur Probe: $180^0 + 0'',02$.

3) Dreieck DAC.

$$\cos(fh) = \frac{5}{6}, \quad \cos(fb) = -\frac{1}{10}, \quad \cos(bh) = \frac{19}{30}.$$

$$\left.\begin{array}{l}(fh) = 33^0\,33'\,26'',29 \\ (fb) = 95^0\,44'\,21'',01 \\ (bh) = 50^0\,42'\,12'',69\end{array}\right\} +$$

Zur Probe: $180^0 - 0'',01$.

4) Dreieck DBC.

$$\cos(gh) = \frac{43}{48}, \quad \cos(ga) = -\frac{1}{64}, \quad \cos(ah) = \frac{11}{24}.$$

$$\left.\begin{array}{l}(gh) = 26^0\,23'\;\;3'',46 \\ (ga) = 90^0\,53'\,43'',07 \\ (ah) = 62^0\,43'\,13'',39\end{array}\right\} +$$

Zur Probe: $180^0 - 0'',08$.

Die an den Kanten liegenden Flächenwinkel bezeichnen wir kurz durch die eingeklammerten Kanten. Dann wird z. B.

$$\cos(f) = \frac{\cos(gh) - \cos(fg)\cos(fh)}{\sin(fg)\sin(fh)}.$$

Die Einsetzung der Werte ergibt:

$$\cos(f) = \frac{31}{\sqrt{1485}}, \quad \sin(f) = \frac{\sqrt{524}}{\sqrt{1485}},$$

$$\log\cos(f) = 9{,}905\,4985; \quad \log\sin(f) = 9{,}773\,8024;$$

$$(f) = 36^0\,26'\,34'',56.$$

Ebenso findet man:

$$\sin(g) = \frac{8\sqrt{524}}{\sqrt{61425}}, \quad \cos(g) = \frac{167}{\sqrt{61425}},$$

$$\log\sin(g) = 9{,}868\,5830; \quad \log\cos(g) = 9{,}828\,5439;$$

$$(g) = 47^0\,38'\,14'',70.$$

$$\sin(h) = \frac{3\sqrt{524}}{\sqrt{5005}}, \quad \cos(h) = -\frac{17}{\sqrt{5005}},$$

$$\log\sin(h) = 9{,}987\,0849; \quad \log\cos(180 - h) = 9{,}380\,7469;$$

$$(h) = 103^0\,54'\,14'',48.$$

Wir haben jetzt eine Ecke berechnet. Setzen wir:

$$A = (f), \quad B = (g), \quad C = (h),$$

also auch

$$a = (gh), \quad b = (fh), \quad c = (fg),$$

so wird:

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle a = 26^{0}\,23'\;\;3'',46; & \sphericalangle A = \;\;36^{0}\,26'\,34'',56 \\ \sphericalangle b = 33^{0}\,33'\,26'',29; & \sphericalangle B = \;\;47^{0}\,38'\,14'',70 \\ \sphericalangle c = 46^{0}\,34'\;\;2'',87; & \sphericalangle C = 103^{0}\,54'\,14'',48 \\ \hline & \;\;\;\;187^{0}\,59'\;\;3'',74. \end{array} \Bigg\} +$$

Der Exzeß über 180° beträgt nahezu 8°.

In allen Werten für die Sinus der Winkel kehrt dieselbe Irrationalität wieder, nämlich $\sqrt{524} = 2\sqrt{131}$. Wie wir finden werden, kehrt diese auch für die übrigen Sinus der Flächenwinkel an dem betrachteten Tetraeder wieder. Sie hängt mit dem Tetraedervolum zusammen. Für die Ecke C ergibt sich $\sqrt{8384} = 8\sqrt{131}$ und

$$\cos(a) = \frac{79}{15\sqrt{65}}, \quad \sin(a) = \frac{\sqrt{8384}}{\sqrt{14625}},$$

$$\log\cos(a) = 9{,}815\,0792; \quad \log\sin(a) = 9{,}879\,1777;$$

$$(a) = 49^{0}\,12'\,46'',59.$$

$$\cos(b) = \frac{13}{\sqrt{693}}, \quad \sin(b) = \sqrt{\frac{524}{693}},$$

$$(b) = 60^{0}\,24'\,26'',72.$$

Hiermit ist eine neue dreiseitige Ecke berechnet. Wir setzen:

$$\sphericalangle A = (a), \quad \sphericalangle B = (b), \quad \sphericalangle C = (h),$$

also:

$$\sphericalangle a = (bh), \quad \sphericalangle b = (ah), \quad \sphericalangle c = (ab).$$

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle a = 50^{0}\,42'\,12'',69; & \sphericalangle A = \;\;49^{0}\,12'\,46'',59 \\ \sphericalangle b = 62^{0}\,43'\,13'',39; & \sphericalangle B = \;\;60^{0}\,24'\,26'',72 \\ \sphericalangle c = 82^{0}\,49'\;\;9'',28; & \sphericalangle C = 103^{0}\,54'\,14'',48 \\ \hline & \;\;\;\;213^{0}\,31'\,27'',79. \end{array} \Bigg\} +$$

Der Exzeß ist 33° 31′ 27″,79.

Für die übrigen zwei Ecken des Tetraeders bleibt nur ein Flächenwinkel zu berechnen, nämlich (c):

$$\cos(c) = -\frac{23}{\sqrt{2625}}, \quad \sin(c) = \sqrt{\frac{2096}{2625}} = \frac{4\sqrt{131}}{\sqrt{2625}},$$

$$\log\cos(180 - c) = 9{,}652\,1632; \quad \log\sin(c) = 9{,}951\,1310;$$

$$(c) = 116^{0}\,40'\,26'',51.$$

Wir bezeichnen für die Ecke B:

also

$$\sphericalangle A = (a), \quad \sphericalangle B = (c), \quad \sphericalangle C = (g),$$
$$\sphericalangle a = (cg), \quad \sphericalangle b = (ag), \quad \sphericalangle c = (ac).$$

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle a = 57^0 54' 36'',19; & \sphericalangle A = 49^0 12' 46'',59 \\ \sphericalangle b = 90^0 53' 43'',07; & \sphericalangle B = 116^0 40' 26'',51 \\ \sphericalangle c = 55^0 46' 16'',06; & \sphericalangle C = 47^0 38' 14'',70 \\ & \overline{213^0 31' 27'',80.} \end{array} \Bigg\} +$$

Für die letzte Ecke A setzen wir:

$$\sphericalangle A = (b), \quad \sphericalangle B = (c), \quad \sphericalangle C = (f),$$
$$\sphericalangle a = (cf), \quad \sphericalangle b = (bf), \quad \sphericalangle c = (bc).$$

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle a = 75^0 31' 20'',96; & \sphericalangle A = 60^0 24' 26'',72 \\ \sphericalangle b = 95^0 44' 21'',01; & \sphericalangle B = 116^0 40' 26'',51 \\ \sphericalangle c = 41^0 24' 34'',63; & \sphericalangle C = 36^0 26' 34'',56 \\ & \overline{213^0 31' 27'',79.} \end{array} \Bigg\} +$$

Das betrachtete Tetraeder gehört der besonderen Klasse an, für welche die an den Gegenkanten liegenden Winkel einen gleichen Unterschied zeigen. Es ist:

$$(a) - (f) = (b) - (g) = (c) - (h) = 12^0 46' 12'',3.$$

§ 7. Zeichnung in einer Ebene. Orthogonale Projektion.

In der Planimetrie bildet die Konstruktionsaufgabe das zum Fortschritt drängende Element, während der Lehrsatz die gewonnene Erkenntnis zusammenfaßt und ausspricht. Für die Schule werden dabei immer diejenigen Aufgaben bevorzugt werden müssen, welche mit Zirkel und Lineal lösbar sind. Es sind dies die auf quadratische Gleichungen führenden Aufgaben. Die Stereometrie führt, sobald man ihre Aufgaben rechnerisch angreift, auf Gleichungen, die, rein äußerlich betrachtet, sich in nichts von den planimetrischen Aufgaben unterscheiden.

So könnte die Gleichung

$$\sin\alpha \sin\beta \cos C = \cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta$$

als rein planimetrische Aufgabe gelöst werden: es soll der Winkel C bestimmt werden, wenn die drei Winkel α, β, γ gegeben sind. Ebenso erinnern wir uns der Aufgabe, in einem Tetraeder $ABCD$ von D

aus auf die Ebene ABC das Lot zu fällen. Kennt man die sechs Kanten, so führt die Lösung auf planimetrische Zeichnungen. In vielfacher Weise ist man imstande, die Entfernung eines in der Ebene ABC gegebenen Punktes E von D zu bestimmen. Jede solche Aufgabe ist für die Schule verwendbar. Sie sind leicht und zwingen doch zu entschiedener Betätigung der räumlichen Vorstellung. Wir lösen die sechs Grundaufgaben S. 338.

1) Gegeben a, b, c.

In Fig. 158 sei $AB \perp BC$ und $AB \perp BD$. Wir nehmen AB willkürlich an; dann sind die Dreiecke ABC, ABD, ACD bestimmt. Das Dreieck CBD läßt sich nunmehr zeichnen. $\sphericalangle CBD$ ist der gesuchte Flächenwinkel C.

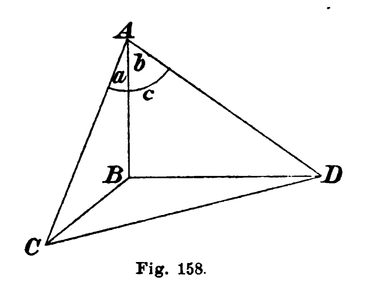


Fig. 158.

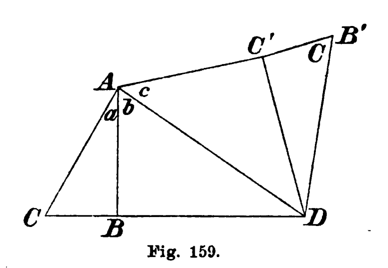


Fig. 159.

Für die Zeichnung klappen wir die Dreiecke ABC und ABD durch Drehung um die Achse AB in eine Ebene (Fig. 159). In diese Ebene legen wir auch $\triangle CAD$, indem wir es um AD in dieselbe Ebene herumdrehen. Aus DC', DB, BC als Seiten zeichnen wir nun das Dreieck, welches den gesuchten Winkel C liefert. Es ist $AC = AC'$, $DB = DB'$, $C'B' = CB$.

2) b, c, A.

Ersetzen wir die Benennung der Aufgabe durch die gleichbedeutende a, b, C, so enthält Fig. 158 die Vorbereitung.

Für die Lösung erhalten wir gemäß Fig. 159 die Dreiecke ABC, ABD, dann legen wir CB und BD unter dem $\sphericalangle C$ aneinander, und die Gegenseite mit AC und AD zu einem Dreieck verbunden liefert $\sphericalangle c$.

3) b, c, B.

Hier liefert Fig. 157a die Vorbereitung. Setzen wir $\sphericalangle CDB = b$, $CDA = c$, $CAE = B$. Nehmen wir CD willkürlich an, so ergeben sich DB, CB, CA, DA, dann mit Hülfe von $\sphericalangle B$ weiter AE, CE, also auch $\sphericalangle CBE = C$. Dann ist das Viereck $BDAE$ sofort herstellbar, und wir haben $\sphericalangle a = BDA$.

4) $a, B, C.$

Nehmen wir CE (Fig. 157a) willkürlich an, so erhalten wir BE und AE und gewinnen so das rechtwinklige Kreisviereck $DBEC$. Dies liefert aus BC und DB die Seite $\sphericalangle CDB = b$, ebenso $\sphericalangle CDA = c$.

5) $a, A, B.$

Wir verwandeln die Bezeichnung in $b, B, C.$ Dann liefert Fig. 157a die Vorbereitung durch Zurückführung auf 3).

6) $A, B, C.$

Am einfachsten ist die Zurückführung auf die Polarecke. Doch kann die Lösung auch unmittelbar Fig. 157 entnommen werden.

Unter einer Abbildung im weiteren Sinne verstehen wir ein solches geometrisches Gebilde, welches dem ursprünglich gegebenen irgendwie punktweise entspricht. Wenn nun die Forderung erhoben wird, daß alle Winkel in der Abbildung erhalten bleiben sollen, so kann diese im Raum nur durch Herstellung eines räumlichen Modells erfüllt werden. Begnügt man sich jedoch mit der Forderung, daß aus dem Abbild das Urbild entnommen werden soll, so kann ein räumliches Urbild auch in der Ebene dargestellt werden. Die einfachste und wichtigste aller Abbildungen ist nun die orthogonale Projektion.

Fällt man von einem Punkte A eine Senkrechte auf die Ebene α, so ist der Fußpunkt B die orthogonale Projektion von A auf α. Nimmt man eine zweite Ebene $\beta \perp \alpha$ und fällt von A auf α und β die Senkrechten AB und AC, so bestimmen die Projektionen B und C zusammen die Lage des Punktes A eindeutig im Raume. Die beiden Projektionen finden ihre einfachste Verwendung in der Baukunst und führen in allbekannter Weise zu den Begriffen Grundriß und Aufriß. Nimmt man noch eine dritte Ebene senkrecht zu den beiden vorgenannten hinzu, so hat man den Seitenriß, der aber nur leichterer Versinnlichung dient.

Wir müssen uns nun mit der Bewegung des Punktes A beschäftigen und die entsprechenden Änderungen der Projektion untersuchen.

Die Projektion einer Geraden ist eine Gerade; teilt ein Punkt E eine Strecke im Verhältnis $EA : EC = m : n$ (Fig. 160), so teilt die Projektion des Punktes F die Projektion der Strecke in demselben Verhältnis $FB : FD = m : n$. Wenn eine Gerade mit einer Ebene α den Neigungswinkel λ bildet, so besteht zwischen der Strecke $s = AC$ und der Projektion $p = DB$ die Beziehung

$$p = s \cos \lambda.$$

Dabei sind die beiden Grenzfälle $\lambda = 0$ und $\lambda = 90^0$ besonders hervorzuheben.

Wird eine Ebene α auf eine andere β projiziert, so erhalten wir ein punktweises Entsprechen der beiden Gebilde von besonderer

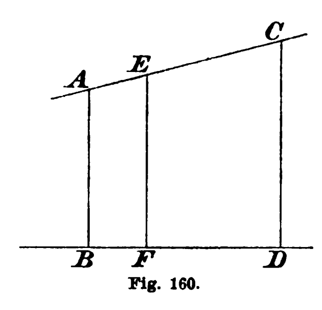


Fig. 160.

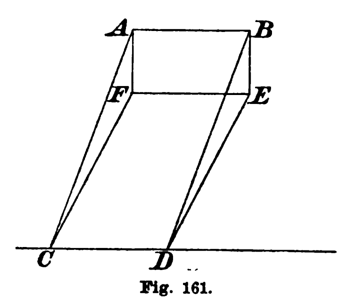
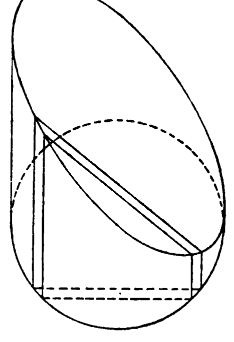


Fig. 161.

Wichtigkeit. Die Punkte der Schnittlinie (Achse der Kollineation) entsprechen sich selbst; Strecken, welche der Schnittlinie parallel laufen, bleiben unverändert, während Strecken, die senkrecht zur Schnittlinie stehen, der obigen Beziehung $p = s \cos \lambda$ folgen, wo λ den Neigungswinkel der Ebenen α und β bedeutet. Hieraus ergeben sich wichtige Beziehungen. Das Flächenstück $ACDB$ (Fig. 161) sei zunächst ein Rechteck mit AC als der senkrecht zur Durchschnittslinie gezogenen einen Seite. Ist der Neigungswinkel der Ebenen λ, so ist

$$\text{Inh. } FCDE = \text{Inh. } ACDB \cdot \cos \lambda.$$


Fig. 162.

Da nun (Fig. 162) jedes begrenzte Flächenstück in Rechtecke zerlegt werden kann mit einer zur Schnittlinie senkrechten Seite, so überträgt sich diese Gleichung auf die begrenzte Fläche selbst. Ist I der Inhalt einer begrenzten ebenen Fläche und I_0 der Inhalt ihrer Projektion, so ist

$$I_0 = I \cos \lambda.$$

Die Projektion einer beliebigen Geraden ist wieder eine Gerade, die sich mit der ursprünglichen in einem Punkte der Schnittlinie schneidet. Sei $F(x, y) = 0$ irgend eine Kurve in einer Ebene. Wir projizieren diese Ebene auf eine andere, welche mit ihr den Winkel λ bildet. Die x-Achse sei die Schnittlinie der beiden Ebenen. Dann verwandelt sich y in $y \cos \lambda = y'$, während x unverändert bleibt. Die Gleichung der Projektion von $F(x, y) = 0$ ist also

$$F\left(x, \frac{y}{\cos \lambda}\right) = 0.$$

Projizieren wir einen Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ und ist der Neigungswinkel λ durch $\cos\lambda = \frac{b}{a}$ bestimmt, so hat die Projektion die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Die Projektion ist also eine Ellipse. Die Abbildung durch orthogonale Projektion ist weder winkeltreu noch flächentreu; aber die Verhältnisse des Schneidens, Berührens und die Verhältnisgleichheit der Teilung übertragen sich ungeändert. Daraus folgt, daß Aufgaben, welche nur auf diesen Gedankenkreis beschränkt sind, sofort vom Kreise auf die Ellipse übertragen werden können. Solche sind:

Gegeben eine Gerade und eine Ellipse durch Lage und Größe ihrer Halbachsen. Man bestimme die Schnittpunkte.

Gegeben eine Ellipse wie vorhin und ein Punkt außerhalb. An die Ellipse eine Tangente von dem Punkt zu ziehen.

Die Sätze über Pol und Polare sind sofort übertragbar. Der Inhaltssatz $I_0 = I\cos\lambda$ liefert $a^2\pi \cdot \frac{b}{a}$ oder $ab\pi$ als Inhalt der Ellipse. Nicht übertragbar ist dagegen z. B. der Satz von der Potenz am Kreise und die Bestimmung des Umfangs der Ellipse.

Ein rechter Winkel in der projizierten Ebene verhält sich bei der Projektion wie folgt.

Wenn die Schenkel des Winkels die Projektionsebene schneiden, so fällt die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite gezogene Senkrechte innerhalb des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks ABC. Es sei D (Fig. 163) die Projektion von B. Legt man BAC um AC in die Projektionsebene, so fällt D innerhalb, also ist $\sphericalangle ADC > ABC$. Die Projektion des Nebenwinkels von ABC wird Nebenwinkel der Projektion, daher kleiner als 90^0.

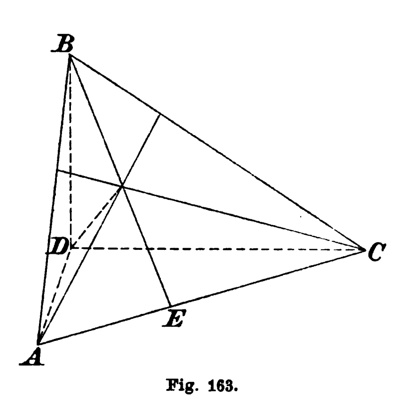


Fig. 163.

Wenn die Schenkel eines rechten Winkels die Projektionsebene gehörig verlängert entweder beide schneiden oder beide nicht schneiden, so wird die Projektion des rechten Winkels stumpf. Wenn ein Schenkel die Projektionsebene schneidet, der andere aber nicht, so wird die Projektion des rechten Winkels spitz. Wenn endlich ein Schenkel des rechten Winkels der Projektionsebene parallel ist, so ist auch die Projektion des Winkels ein rechter.

Dieselbe Schlußweise kann auf die Bestimmung einer beliebigen Kugelzone angewandt werden.

Sei (Fig. 174) (in anderer Auffassung wie vorhin) $OH = a$, $GH = h$. Wir teilen h in n gleiche Teile und legen durch jeden Teilpunkt einen zu EF senkrechten Schnitt. Die Summe nähert sich dem Ausdruck

$$\sum_0^n{}_m \frac{h}{n}\left(r^2 - \left(a + \frac{mh}{n}\right)^2\right)\pi,$$

oder nach Ausführung des Grenzübergangs

$$\left(r^2 h - a^2 h - a h^2 - \tfrac{1}{3} h^3\right)\pi.$$

Eine besonders einfache geometrische Einkleidung des vorhin entwickelten Gedankens ist der Hauptsatz von Cavalieri:

Werden zwei Körper durch Parallelschnitte getroffen und sind die Parallelschnitte, welche in gleicher Höhe durch die Körper gehen, flächengleich, so sind die Körper inhaltsgleich. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Gleichheit der prismatischen Körper, welche zwischen zwei unendlich nahen Parallelschnitten enthalten sind und durch Summation die Körperinhalte ergeben.

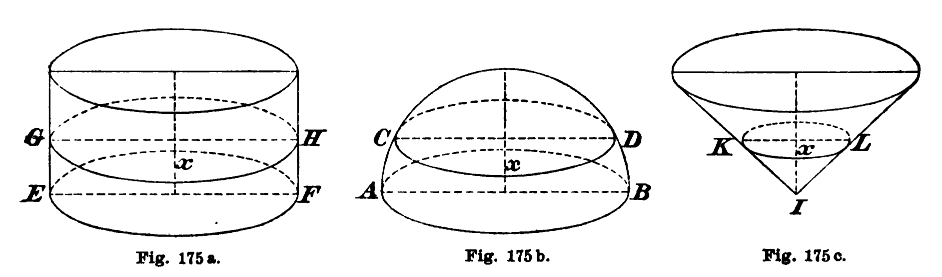


Fig. 175 a. Fig. 175 b. Fig. 175 c.

Wendet man diesen Gedanken auf Zylinder, Halbkugel und Kegel an, wie Fig. 175 es zeigt, so folgt, daß Zylinderschnitt = Halbkugelschnitt + Kegelschnitt, also

$$r^2 \pi h = \text{Halbkugel} + \tfrac{1}{3} r^3 \pi.$$

Ebenso besteht diese Gleichung für die Körper $ABCD$, $EFGH$, IKL und führt zu der Gleichung

$$K = r^2 \pi x - \tfrac{1}{3} x^3 \pi,$$

wo K die durch Äquator und Parallelkreis begrenzte Kugelscheibe mit der Dicke x bezeichnet.

Den oberen Teil, die Kugelkappe K_p, finden wir hieraus durch Rechnung. Sei $r - x = h$, so wird

$$K_p = \frac{2}{3}r^3\pi - r^2x\pi + \frac{1}{3}x^3\pi,$$

$$K_p = rh^2\pi - \frac{1}{3}h^3\pi.$$

Aus dem Inhalte der Kugel gewinnt man die Oberfläche S. Wir bedecken die Oberfläche mit einem feinen Netze von unendlich kleinen Dreiecken, deren Summe die Oberfläche der Kugel ausmacht. Jedes Dreieck führt als Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, zum Inhalt $\frac{1}{3}\alpha r$; die Summe der Inhalte ist der Körperinhalt der Kugel, also

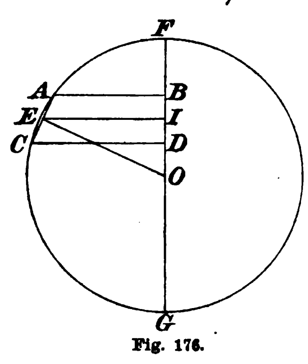


Fig. 176.

$$\frac{1}{3}Sr = \frac{4}{3}r^3\pi,$$

$$S = 4r^2\pi,$$

Die Mehrfachen $4r^2\pi$, $3r^2\pi$, $2r^2\pi$, $r^2\pi$ sind geometrisch: Oberfläche der Kugel, der Halbkugel, krummer Teil der Halbkugel, Hauptkreis der Kugel.

Andere Methoden bestimmen zuerst die Oberfläche der Kugel und dann ihren Körperinhalt.

Die in den meisten Schulbüchern bevorzugte Darstellung verfährt folgendermaßen. Sei (Fig. 176)

$$AB \perp FG, \quad CD \perp FG, \quad AB = a, \quad CD = b, \quad AC = s,$$

$$FO = OG = r, \quad OE = \varrho, \quad BD = h.$$

dann ist

$$EI : \varrho = h : s,$$

also

$$(a + b)s = 2\varrho h.$$

Multipliziert man beiderseits mit π, so erhält man einen Kegelstumpfmantel, welcher einem Zylindermantel von gleicher Höhe gleich ist. Läßt man die Figur sich um FG drehen, so wird $BACD$ die Hälfte des Durchschnitts durch den Kegelstumpf. Nun beschreibt man in den Halbkreis $FACG$ die Hälfte eines regelmäßigen $2n$-Ecks, welches sich dem Halbkreise beliebig nähert und bei der Umdrehung eine Summe von Kegelmänteln hervorbringt, deren Gesamtoberfläche $2r\varrho\pi$ ist. Beim Grenzübergang wird $r = \varrho$.

Diese Schlußweise ist sofort auf jede Zone anwendbar, z. B. auf die zwischen den Punkten B und D des Durchmessers durch senkrechte Ebenen begrenzte Zone. Wir teilen den Bogen AC in n gleiche Teile, verbinden jeden mit dem folgenden durch eine gleiche Sehne, die jede von O den Abstand ϱ haben mag. Die von den n Teilpunkten auf FG gefällten Senkrechten mögen BD in die Summe

$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{n-1} = h$$

zerlegen. Dann ist die Summe der schmalen aus den gleichen Sehnen bei der Umdrehung hervorgehenden Kegelmäntel:

$$2\varrho\pi(h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}) = 2\varrho\pi h.$$

Die Zone selbst wird bei Grenzübergang $2r\pi h$.

Diesem Ergebnis kann man eine höchst elegante geometrische Form geben. Beschreibt man einen Zylinder, welcher die Kugel berührt (Fig. 177) und zieht zwei Schnitte senkrecht zur Achse des Zylinders, so ist die zwischen den Schnitten liegende Kugelzone gleich dem zwischen ihnen liegenden Zylindermantel. Projiziert man von der Achse des Zylinders aus durch

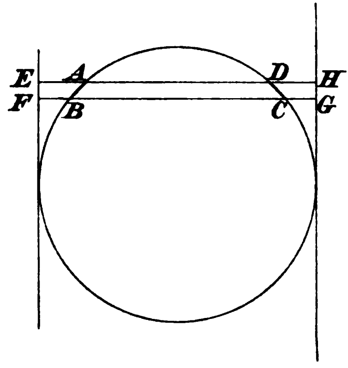


Fig. 177.

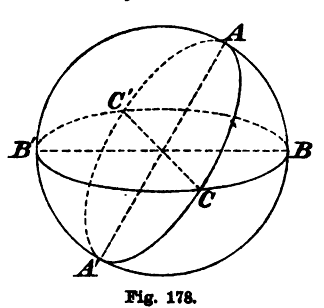


Fig. 178.

senkrecht zu ihr gezogene Strahlen jeden Punkt der Kugel auf den Zylinder und breitet dann den Zylinder in die Ebene aus, so wird die Kugel auf die Ebene abgebildet.

Die krumme Oberfläche der Kugelkappe ist $2rh\pi$, wenn h die Höhe der Kappe, r der Radius der Kugel. Hieraus folgt die Größe des Kugelsektors durch die bekannte Grenzbetrachtung:

$$\tfrac{2}{3}r^2h\pi$$

und durch Subtraktion des Kegels $\frac{1}{3}h(2r - h)(r - h)\pi$ wieder das Kugelsegment.

Gehen wir jetzt an die Bestimmung des Kugeldreiecks. Zerschneidet man die Kugel durch Ebenen, welche einen Durchmesser der Kugel zur gemeinsamen Schnittlinie haben, so zerfällt die Kugelfläche in Zweiecke. Jedes Zweieck ist bestimmt durch den Kugelradius und den Winkel, welchen die schneidenden Ebenen bilden, den Winkel des Zweiecks. Hat dieser Winkel die Größe A in künstlichem Maß, so ist der Inhalt des Zweiecks

$$4r^2\pi \cdot \frac{A}{360}.$$

Betrachten wir nun das Dreieck ABC (Fig. 178), welches auf der Kugel von drei Hauptkreisen gebildet wird. Die Gegenpunkte

A', B', C' bilden das Gegendreieck $A'B'C'$, welches in den Seiten und Winkeln genau mit ABC übereinstimmt und ihm symmetrisch ist. Wählt man auf ABC ein unendlich kleines Stück, welches als eben angesehen wird, so entspricht ihm in $A'B'C'$ ein gleich großes, weil kongruentes Stück. $A'B'C'$ ist also mit ABC inhaltsgleich.

Betrachten wir nun die Halbkugel $BB'CC'A$, so setzt sie sich aus dem Zweieck $B'ABC$ und zwei Dreiecken $C'AB$ und $C'AB'$ zusammen. Bezeichnen wir den Flächeninhalt von ABC mit x, so entsteht hiernach

$$AC'B = 4r^2\pi \cdot \frac{C}{360} - x, \quad B'AC' = 4r^2\pi \cdot \frac{A}{360} - B'A'C',$$

also für die ganze Halbkugel

$$2r^2\pi = 4r^2\pi\left(\frac{B}{360} + \frac{A}{360} + \frac{C}{360}\right) - 2x,$$

$$x = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180).$$

Sind A, B, C in natürlichem Maß gegeben, so ist die Zahl 180 durch π zu ersetzen. Die Größe

$$A + B + C - 180 = \varepsilon$$

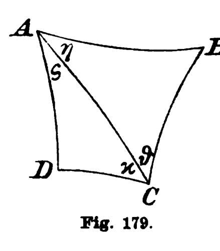


Fig. 179.

heißt sphärischer Exzeß. Wir erkennen auch aus diesem Ausdruck, daß die Winkelsumme der dreiseitigen Ecke immer größer ist als 180°.

Die Einfachheit vorstehender Formel läßt uns sofort die Aufgabe für das Vieleck in Angriff nehmen. Für das Viereck (Fig. 179) ergibt sich die Fläche

$$\frac{r^2\pi}{180}(\eta + B + \vartheta - 180) + \frac{r^2\pi}{180}(D + \varkappa + \varsigma - 180),$$

$$F_4 = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C + D - 2 \cdot 180).$$

So kann man weiter schließen. Für das m-Eck folgt:

$$F_m = \frac{r^2\pi}{180}(A_1 + A_2 + \cdots + A_m - (m-2)\,180).$$

Aus diesen Formeln können wir wichtige Folgerungen ziehen.

§ 10. Kugelteilung und regelmäßige Körper.

Wir nennen ein regelmäßiges Dreieck der Kugelfläche ein solches, welches gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Sind die Seiten gleich, so sind auch die Winkel gleich und umgekehrt. Ebenso erklären wir ein regelmäßiges Kugelvieleck als ein

solches, dessen Seiten und Winkel untereinander gleich sind. Denken wir uns nun auf der Kugelfläche ein regelmäßiges Dreieck mit dem Winkel A gegeben, so ist sein Inhalt

$$\frac{r^2\pi}{180}(3A - 180) = \frac{r^2\pi}{60}(A - 60).$$

In der Kugelfläche ist sein Inhalt demnach p-mal enthalten, wo

$$p = \frac{240}{A - 60}.$$

Folgt nun hieraus, daß die Kugelfläche mit p solchen Dreiecken derartig bedeckt werden kann, daß kein Teil der Kugelfläche unbedeckt bleibt? Das ist nicht der Fall, wie folgende Überlegung zeigt. Nehmen wir $A = 65^0$, so wird $p = 48$. Versuchen wir aber Dreiecke mit den Winkeln $A = 65^0$ um einen Punkt der Kugel P nebeneinander unterzubringen, so werden fünf solcher Dreiecke um P herum den Winkel 325^0 ausfüllen und einen Winkel von 35^0 übrig lassen, der nicht ausgefüllt werden kann. Neben der Ganzzahligkeit von p wird also noch notwendig, daß A ein Teiler von 360 sei. Hier kommen die Zahlen 72, 90, 120 in Betracht und ergeben für p die Werte 20, 8, 4. Für diese Zahlen gelingt die Bedeckung der Kugel mit regelmäßigen Dreiecken wirklich und die erhaltenen Eckpunkte bestimmen drei regelmäßige Körper, das Ikosaeder, Oktaeder, Tetraeder.

Für das regelmäßige Viereck ist die Fläche

$$\frac{r^2\pi}{180}(4A - 360),$$

daher

$$p = \frac{180}{A - 90}.$$

Es findet sich nur eine Lösung: $A = 120$, $p = 6$.

Die Kugelfläche kann mit sechs regelmäßigen Vierecken bedeckt werden und der entsprechende regelmäßige Körper ist der Würfel.

Für das regelmäßige Fünfeck ist die Fläche

$$\frac{r^2\pi}{180}(5A - 540)$$

und folglich

$$p = \frac{144}{A - 108}.$$

Es findet sich nur eine Lösung: $A = 120$, $p = 12$. Die Kugelfläche kann mit 12 regelmäßigen Kugelfünfecken überzogen werden und der entsprechende regelmäßige Körper ist das Dodekaeder.

Der Nachweis der Wirklichkeit ist hiermit noch nicht geführt. Man erbringt ihn für Tetraeder, Würfel, Oktaeder in einfacher Weise

durch Herstellung aus Grundfläche und Höhe oder für das Oktaeder aus Zusammensetzung zweier vierseitiger Pyramiden. Ähnlich, wenn auch weniger einfach, verfährt man beim Dodekaeder und Ikosaeder.

Wir bedienen uns folgender Betrachtung, die sich an das vorhergehende sehr natürlich anschließt.

Sei auf der Kugel ein sphärisches Dreieck gezeichnet, dessen Winkel einzeln 72° sind. Das Dreieck ist also gleichseitig und für Seite α ergibt sich

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos^2 A}{\sin^2 A},$$

und für

$$A = 72^0, \quad \cos A = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

folgt

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

also

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \sqrt{\frac{1+2i}{1-2i}}.$$

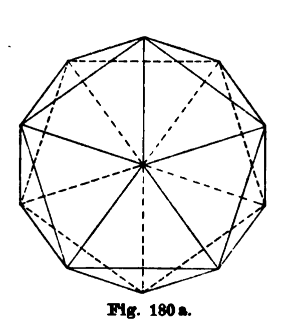
Legen wir nun zwei solche Dreiecke mit den gleichen Seiten aneinander, so ergibt sich für die Entfernung δ der gegenüberliegenden Spitzen

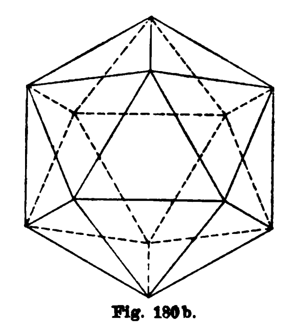
$$\cos\delta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos 144^0.$$

Es ist aber

$$\cos 144^0 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{daher} \quad \cos\delta = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Es ist also $\alpha + \delta = 180^0$. Nun gewinnen wir unter Anlehnung an geographische Vorstellungen sofort folgende klare Herstellung des Ikosaeders. Wir gehen vom Nordpol aus auf 10 sich unter 36°


Fig. 180 a.


Fig. 180 b.

schneidenden Meridianen zum Südpol. Auf 5 von diesen, die sich unter je 72° schneiden, treffen wir im Polabstand α je eine Ecke des Ikosaeders; auf den zwischenliegenden Meridianen treffen wir im

Nordpolabstand δ, also im Südpolabstand α wieder je eine Ecke. Das Ikosaeder hat also 12 Ecken: Nordpol, Südpol und 10 auf beiden Seiten des Äquators wechselweise verteilte in gleichen Abständen von diesem liegende Punkte.

Hieraus ergibt sich auch eine einfache Zeichnung des Ikosaeders. Man projiziert senkrecht auf die Äquatorialebene. Nordpol und Südpol fallen dann zusammen, die übrigen 10 Ecken liegen auf einem Kreise um den Mittelpunkt, dessen Radius $r \sin \alpha$ ist, und bilden ein ihm einbeschriebenes regelmäßiges Zehneck (Fig. 180a). Eine andere

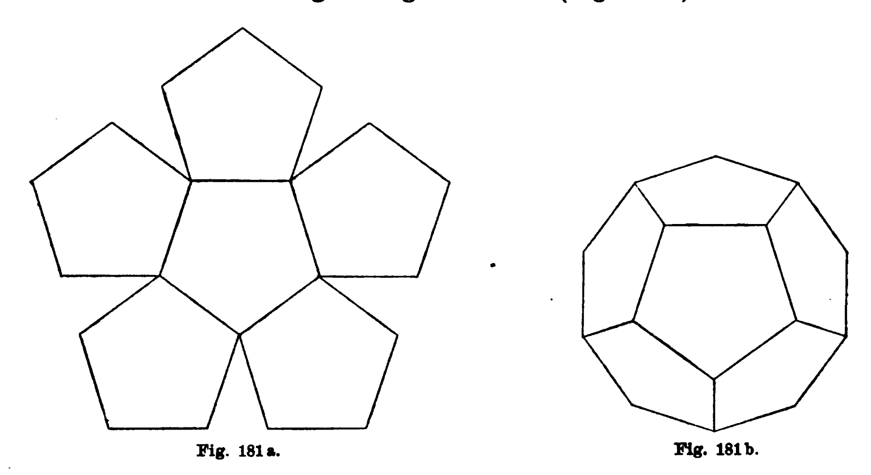


Fig. 181 a. Fig. 181 b.

einfache Projektion erhält man, wenn man auf eine der Seitenflächen des Ikosaeders die Ecken senkrecht projiziert (Fig. 180b). Die Seitenflächen sind paarweise parallel. Dies ergibt bei obiger Kugeldarstellung die Betrachtung des Antipodendreiecks.

Die Bestimmung des Kantenwinkels beim Ikosaeder vollzieht sich durch Betrachtung einer dreiseitigen Ecke mit den Winkeln 60°, 60°, 108° als Seiten. Fünf regelmäßige in einer Ecke zusammenstoßende Dreiecke bilden einen Teil des Ikosaeders, der in der vorigen Betrachtung vom Nordpol ausgeht. Er erscheint als Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche. Für den Kantenwinkel ε ist

$$\cos \varepsilon = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Daraus folgt

$$\sin \varepsilon = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

Hieraus bestimmt man den Radius r der Umkugel und ϱ der Inkugel des Ikosaeders. Es ist, wenn a Kante des Ikosaeders,

$$r = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a, \quad \varrho = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}a; \quad r = a \sin 72^0.$$

Für den Körperinhalt I_{20} ergibt sich

$$I_{20} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3.$$

Die Herstellung des Dodekaeders kann folgendermaßen geschehen. Man errichtet auf den fünf Seiten a eines regelmäßigen Fünfecks nach außen je ein regelmäßiges Fünfeck und hebt sie aus der Ebene heraus, bis sie zu einer korbartigen Figur zusammentreten, deren Grundfläche das ursprüngliche Fünfeck ist und deren oberer Rand aus einer Zickzacklinie von 10 gleichen Strecken besteht. Ein zweites genau so herzustellendes Körbchen zahnt mit dem ersten zum Dodekaeder zusammen. Hieraus ergibt sich eine einfache rechtwinklige Projektion des Dodekaeders. Beim Aufrichten der Fünfecke aus der Ebene beschreibt die Projektion jedes Punktes eine zur Drehungsachse senkrechte Gerade. Damit kann die Projektion eines Punktes, in welchen beim Abschluß der Bewegung zwei Nachbarfünfecke sich zusammenschließen, gefunden werden.

Den Kantenwinkel finden wir leicht, da die Ecken dreiseitig mit den gleichen Seiten $\alpha = 108^0$ sind.

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos 36^0.$$

Für den Radius der Inkugel ϱ und der Umkugel r findet sich

$$\varrho = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}, \quad r = \frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}.$$

Der Inhalt wird

$$\varDelta_{12} = \frac{a^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}} = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}).$$

Die Oberfläche S wird

$$S = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Unter der Zahl der Ecken e, der Kanten k und der Seiten s eines Vielflächners (Polyeders) besteht eine merkwürdige Beziehung, die wir nun ableiten wollen. Wir bedienen uns zu diesem Zweck der sphärischen Abbildung.

Wir denken uns einen Vielflächner, der einfach geschlossen ist, ohne einspringende Ecken. Im Innern sei ein Punkt O beliebig gewählt und mit allen Ecken verbunden. Wir denken uns nun irgendwo im Raume eine Kugel mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt O'.

Durch O' ziehen wir parallele Strahlen zu den durch O gehenden Verbindungslinien. Alsdann werden auf der Einheitskugel durch die Schnittpunkte der Parallelstrahlen Punkte bestimmt, welche den Ecken des Vielflächners eindeutig entsprechen. Verbindet man die Bildpunkte durch Hauptkreisbögen, so überzieht sich die Einheitskugel mit einem Netze, dessen Maschen den Begrenzungsflächen des Vielflächners entsprechen. Betrachten wir irgend eine solche Masche. Sie ist ein m-Eck und daher ihre Fläche, wenn ihre Winkel A_1, $A_2, \ldots, A_m$ sind,

$$\frac{\pi}{180}[A_1 + A_2 + \cdots + A_m - (m-2)180].$$

Bilden wir die Summe aller Maschen. Sie muß 4π, die Oberfläche der Kugel ergeben. Zunächst ist

$$\sum(A_1 + A_2 + \cdots + A_m)$$

zu berechnen. Diese Summe ist $360 \cdot e$. Denn sie ist nichts anderes als die Summe aller auf der Kugelfläche entstandenen Winkel. Dann ist $\sum m$ zu bestimmen. Diese ist $2k$, denn sie ist gleich der Zahl der Kanten, aber doppelt gezählt, weil jede Kante in zwei Nachbarmaschen vorkommt. Endlich bekommen wir so oft $2 \cdot 180$, als Maschen da sind, also s-mal. Mithin haben wir:

$$\frac{\pi}{180}(360e - 360k + 360s) = 4\pi,$$

$$e + s = k + 2.$$

Beispiele der fünf regelmäßigen Körper:

Körper	e	s	k	m	n
Tetraeder	4	4	6	3	3
Oktaeder	6	8	12	4	3
Ikosaeder	12	20	30	5	3
Hexaeder	8	6	12	3	4
Dodekaeder	20	12	30	3	5

Für die regelmäßigen Körper können wir noch folgende Beziehungen aufstellen. Jede Ecke hat die gleiche Ordnungszahl, d. h. jede Ecke ist entweder dreiseitig, vierseitig oder fünfseitig. Sei die Ordnungszahl m, so muß em die Zahl s so oft ergeben als die Seitenzahl n der Begrenzungsflächen beträgt:

$$em = sn.$$

Von jeder Ecke laufen m Kanten aus. Also muß em die doppelte Zahl der Kanten sein:

$$em = 2k.$$

Beide Gleichungen bleiben bestehen für jeden Vielflächner, dessen Ecken gleiche Ordnungszahl und dessen Begrenzungsflächen gleiche Seitenzahl haben.

Wenden wir uns nun zu andern Vielflächnern, deren Seitenflächen nicht mehr alle kongruent und regelmäßig sind. Unter diesen findet sich eine besondere Klasse, welche eine nähere Untersuchung verdient, weil sie für den Unterricht leicht lösbare Aufgaben liefert. Diese halbregelmäßigen Vielflächner haben folgende Eigenschaften:

1. Die Ecken haben sämtlich dieselbe Ordnungszahl.

2. Die Begrenzungsflächen sind regelmäßige Figuren, die in zwei oder mehrere unter sich kongruente Gruppen zerfallen.

3. Die Zusammensetzung der Ecken aus den Winkeln der Begrenzungsflächen ist für jede Ecke dieselbe.

Als Beispiel nehmen wir ein gerades Prisma mit zwei regelmäßigen n-Ecken als Deckflächen und n Quadraten als Seitenflächen. Die Ecken sind alle dreiseitig mit den Seiten 90, 90, $180 - \frac{360}{n}$. Es sind zwei Gruppen kongruenter Begrenzungsflächen vorhanden.

Nehmen wir zunächst an, der von uns betrachtete Vielflächner habe nur dreiseitige Ecken und die Seitenflächen seien kongruente a-Ecke und b-Ecke. Die Anzahl der ersteren sei s_1, die der letzteren s_2. Dann ist

$$s = s_1 + s_2. \tag{1}$$

Zählen wir die ebenen Winkel des Vielflächners, so ergibt sich bei Zählung über die Ecken $3e$, über die einzelnen Seitenfiguren:

$$3e = as_1 + bs_2. \tag{2}$$

Zählen wir die Kanten, so findet sich

$$2k = as_1 + bs_2 = 3e. \tag{3}$$

Nehmen wir dazu den Eulerschen Satz

$$s_1 + s_2 + e = k + 2, \tag{4}$$

so wird

$$2s = e + 4.$$

Nehmen wir nun an, daß jede Ecke aus einem a-Eck und zwei b-Ecken gebildet wird. Jeder Winkel des a-Ecks hat die Größe $180 - \frac{360}{a}$, also die Winkelsumme jeder Ecke

$$180 - \frac{360}{a} + 2\left(180 - \frac{360}{b}\right).$$

Multiplizieren wir mit e, so bekommen wir die Summe aller ebenen Winkel der Oberfläche. Diese ist anderseits in jedem a-Eck $180a - 360$. Daher nach Umformung

(5a) $$e\left(\frac{2}{a} + \frac{4}{b} - 1\right) = 4,$$

(5) $$e = \frac{4ab}{2b + 4a - ab}.$$

Der Klammerausdruck in (5a) muß positiv sein. Es ergibt sich dies auch, wenn man die Seitensumme der Ecke mit 360 vergleicht.

Betrachten wir nun ein a-Eck in der Ebene und errichten über jeder seiner Seiten nach außen hin ein b-Eck. Richten wir die b-Ecke auf, bis sie sich zu einer korbartigen Figur mit dem a-Eck als Grundfläche zusammensetzen. Beschreiben wir um jedes b-Eck und das a-Eck Kreise und errichten in den Mittelpunkten Senkrechte, so schneiden sich diese alle in einem Punkte, und dieser Punkt ist der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel für die entstandene Figur und deshalb auch für den ganzen Vielflächner, weil die Betrachtung sich für die ganze Begrenzung fortsetzt. Eine Inkugel ist nicht vorhanden. Über dem a-Eck steht nun eine gerade n-seitige Pyramide mit dem Kugelmittelpunkt als Spitze. Ist die Seite des a-Ecks p und der Kugelradius r, so findet man für den Winkel A an r als Kante der Pyramide

$$\cos A = -\frac{4r^2 \cos \frac{360}{a} + p^2}{4r^2 - p^2}.$$

Dieselbe Betrachtung gilt für das b-Eck, und für den Winkel B an r als Seitenkante der über dem b-Eck errichteten Pyramide ist

$$\cos B = -\frac{4r^2 \cos \frac{360}{b} + p^2}{4r^2 - p^2}.$$

In jeder Ecke des Vielflächners liegen nun um r als gemeinsame Kante zwei Winkel B und ein Winkel A so herum, daß zusammen 360^0 herauskommen, also

(6) $$A + 2B = 360^0.$$

Diese Gleichung bestimmt r. Bei der sphärischen Abbildung mit dem Mittelpunkt der Umkugel als Ausgangspunkt bildet sich auf der Kugelfläche ein Netz, welches aus regelmäßigen sphärischen a-Ecken und b-Ecken besteht. Die Winkel dieser Figuren sind A und B und für jeden Knotenpunkt des Netzes ist $A + 2B = 360^0$.

Noch eine Bemerkung ist zu machen. Gehen wir von einem b-Eck als Grundfläche aus, so müssen wir es mit a- und b-Ecken abwechselnd umsetzen, weil sonst in einer Ecke nicht jedesmal zwei Winkel des b-Ecks und ein Winkel des a-Ecks zusammentreffen könnten. Also muß b eine gerade Zahl sein. Nun ergeben sich als möglich folgende Annahmen aus (5):

$a = 3,$	$b = 6,$	$e = 12,$	$s = 8,$	$k = 18,$	$s_1 = 4,$	$s_2 = 4,$
3,	10,	60,	32,	90,	20,	12,
4,	6,	24,	14,	36,	6,	8,
5,	6,	60,	32,	90,	12,	20,
$n,$	4,	$2n,$	$n+2,$	$3n,$	2,	$n.$

Hiermit ist die Behandlung dieser Klasse halbregelmäßiger Körper erledigt.

Wird jede Ecke von einem a-Eck, einem b-Eck und einem c-Eck gebildet, so müssen a, b, c gerade Zahlen sein. Es ergibt sich die Gleichung

$$e\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 1\right) = 4,$$

welche nur zwei Auflösungen hat

$$a = 4, \quad b = 6, \quad c = 8;$$
$$4, \quad 6, \quad 10.$$

Für die vierseitigen halbregelmäßigen Vielflächner wird jede Ecke von drei a-Ecken und einem b-Eck oder von zwei a-Ecken und zwei b-Ecken oder von einem a-Eck, zwei b-Ecken und einem c-Eck gebildet. Auch Vielflächner mit fünfseitigen Ecken sind möglich. Jede Ecke wird von vier a-Ecken und einem b-Eck gebildet. Wir verweisen auf die Aufzählung bei Baltzer, El. Math. S. 218ff.

Die Sternfiguren haben kaum unterrichtliche Bedeutung und mögen hier nur erwähnt werden.

An die Betrachtung der regelmäßigen Figuren auf der Kugelfläche und ihrer sphärischen Inkreise reiht sich naturgemäß die Frage, ob es möglich ist, die Kugel mit einem Netze gleicher sich berührender kleiner Kreise zu überziehen.

Ist einem Vielflächner eine Kugel umschrieben, so findet man eine ihm entsprechende Polarfigur, wenn man in jeder Ecke eine Tangentialebene an die Kugel legt.

§ 11. Abbildung.

Von der senkrechten Projektion als einer Art Abbildung ist schon oben die Rede gewesen. Wir werden jetzt andere Abbildungen kennen lernen.

Wird eine Kugel von Geraden o getroffen, die durch einen Punkt O gehen und heißen die Schnittpunkte A, A'; B, B'; C, C'; ..., so ist

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \cdots.$$

Dies ergibt sich folgendermaßen. Eine durch OA und OB gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, für welchen der Satz von der Potenz jene Beziehung liefert. Hat O vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand a, so ist für $a > r$

(1) $$OA \cdot OB = a^2 - r^2$$

und für $a < r$ ist $OA \cdot OB = r^2 - a^2$, wenn OA, OB als zeichenlose Strecken genommen werden. Legt man ihnen nach Verschiedenheit der Richtung verschiedene Vorzeichen bei, so gilt (1) allgemein. $a^2 - r^2$ ist die Potenz des Punktes O bezüglich der Kugel.

Drei Kugeln haben eine Potenzlinie. Sie steht auf ihrer Mittelpunktsebene im Potenzzentrum der drei Hauptkreise senkrecht. Für jeden Punkt der Potenzlinie haben die drei Kugeln gleiche Potenz. Zwei Kugeln haben eine Potenzebene. Man lasse zwei Kreise um ihre Zentrale sich drehen. Dann beschreibt die Potenzlinie der beiden Kreise die Potenzebene der entstehenden Kugeln. Vier Kugeln haben einen Potenzpunkt. Er ist der Schnittpunkt der Potenzlinie der drei Kugeln A, B, C mit der Potenzebene der Kugeln A, D. Die vier Kugeln haben sechs Potenzebenen und vier Potenzlinien, die sämtlich durch das Potenzzentrum der vier Kugeln gehen.

Als Gegenbild dieser Sätze erscheint beim Tetraeder die Eigenschaft, daß die vier auf den Seitenflächen in den Mittelpunkten der Umkreise errichteten Senkrechten sich im Mittelpunkt der Umkugel schneiden. Durch diesen Punkt gehen auch die sechs Ebenen, welche auf den Kanten des Tetraeders in ihren Mittelpunkten senkrecht stehen.

Zwei Kugeln haben einen innern und einen äußern Ähnlichkeitspunkt. Wir finden sie, wenn wir zwei Kreise sich um ihre Zentrale drehen lassen. Sie stimmen für die entstehenden Kugeln mit den Ähnlichkeitspunkten der Kreise. Jede die beiden Kugeln gemeinsam berührende Ebene geht durch einen der beiden Ähnlichkeitspunkte. Drei Kugeln bestimmen Ebenen, welche die drei Kugeln berühren. Schneidet man die drei Kugeln mit einer Ebene, welche die drei

Kugelmittelpunkte enthält (Mittelpunktsebene), so schneidet die gemeinsame Berührungsebene der Kugeln die Mittelpunktsebene in einer der vier Ähnlichkeitsachsen der Hauptkreise.

Zieht man an zwei Kreise eine gemeinsame Tangente und läßt die Figur sich um die Zentrale drehen, so beschreibt die gemeinsame Tangente den Mantel eines beiden Kugeln gemeinsamen Berührungskegels.

Verbindet man einen Punkt O (Augenpunkt) mit einem beliebigen Punkte A und bestimmt einen Punkt A' derartig, daß

$$\frac{OA}{OA'} = m,$$

so ist A' die **ähnliche Abbildung** von A. Dabei ist m irgend eine feste Zahl, die wir positiv oder negativ nehmen, jenachdem A und A' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von O liegen.

Durch ähnliche Abbildung verwandeln sich Gerade und Ebenen in parallel gerichtete Gebilde derselben Art, Kugeln in Kugeln mit dem Augenpunkt als Ähnlichkeitspunkt.

Schneidet man die Strahlen OA, OB, OC, ... mit einer Ebene α, welche in den **Durchstoßungspunkten** A_1, B_1, C_1, ... von den Strahlen OA, OB, OC, ... getroffen wird, so sind A_1, B_1, C_1, ... die perspektivischen Bilder von A, B, C, ... Wir haben die **Zentralperspektive** vor uns. Sie ist die mathematische Vollendung des Sehprozesses. Gerade Linien bleiben in der Zentralperspektive gerade Linien. Ein Bündel paralleler Linien verwandelt sich aber nicht in ein ebensolches, sondern in ein Strahlenbündel mit einem Mittelpunkt. Dieser gemeinsame Schnittpunkt ist der Treffpunkt von α mit der durch O zum Bündel parallelen Geraden. Die hierauf beruhende Methode der **Fluchtpunkte** ist für die Zentralperspektive von größter Bedeutung.

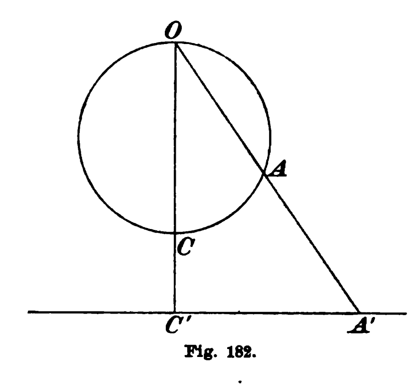


Fig. 182.

Stellt man dem Punkte A und dem Augenpunkte O einen Punkt A' derartig gegenüber, daß

$$OA \cdot OA' = m^2$$

ist, so hat man die **umgekehrte Abbildung** (Inversion, Abbildung durch reziproke Radien, stereographische Abbildung) vor sich. O, A, A' liegen in gerader Linie. Liegen A und A' auf entgegengesetzten Seiten von O, so ersetzen wir obige Gleichung durch $OA \cdot OA' = -m^2$.

In Fig. 182 ist $OC \cdot OC' = OA \cdot OA'$. Die Gerade $A'C'$ ist umgekehrtes Bild des Kreises OAC. Läßt man die Figur um OC als Achse sich drehen, so verwandelt sich der Kreis in eine Kugel, die Gerade in eine Ebene. Für jeden Punkt der Kugel A findet sich in der Ebene ein einziger entsprechender Punkt A' und es ist $OA \cdot OA' = OC \cdot OC' = m^2$. Also ist die umgekehrte Abbildung der Ebene eine durch den Augenpunkt gehende Kugel. Ebenso zeigt man, daß die umgekehrte Abbildung einer Kugel wieder eine Kugel ist, deren gemeinsamer Ähnlichkeitspunkt Augenpunkt der Abbildung ist.

Jeder Kreis kann aufgefaßt werden als Schnitt einer Ebene mit einer Kugel; also verwandelt er sich in einen Kreis oder falls er durch den Augenpunkt geht, in eine Gerade. Eine durch den Augenpunkt gehende Gerade bleibt unverändert; jede andere Gerade verwandelt sich in einen durch den Augenpunkt gehenden Kreis.

Das berühmte Kugelproblem verlangt Herstellung einer Kugel, welche vier gegebene Kugeln berührt. Da die gegebenen Kugeln auch durch Punkte und Ebenen ersetzbar sind, erhält man im ganzen 15 Aufgaben. Für den Fall, daß unter den Bestimmungsstücken sich ein Punkt befindet, machen wir ihn zum Augenpunkt einer beliebigen umgekehrten Abbildung. Dann verwandelt sich die gesuchte Kugel in eine Ebene, welche drei gegebene Kugeln berührt. So ist die Lösung einfach, und alle übrigen Fälle lassen sich auf diesen Fall zurückführen.

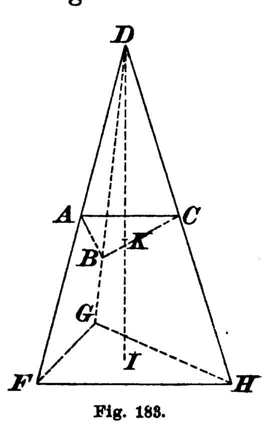


Fig. 183.

Eine zweite Anwendung der umgekehrten Abbildung ist folgende. Sei (Fig. 183) $ABCD$ ein Tetraeder. Wir beschreiben seine Umkugel und bilden nun von D aus umgekehrt ab. Die Kugel verwandelt sich in die Ebene FGH, insbesondere geht Punkt A in F, B in G, C in H über. Ferner verwandelt sich der D gegenüberliegende Punkt des Durchmessers in den Fußpunkt der von D auf FGH gefällten Senkrechten. Wir setzen:

$$DA = f, \quad DB = g, \quad DC = h, \quad DF = f_1, \quad DG = g_1, \quad DH = h_1,$$
$$\sphericalangle ADB = \gamma, \quad BDC = \alpha, \quad CDA = \beta.$$

Dann ist

$$ff_1 = m^2 = gg_1 = hh_1.$$

Ferner ist

$$FG^2 = f_1^2 + g_1^2 - 2f_1g_1 \cos\gamma = \frac{m^4}{f^2} + \frac{m^4}{g^2} - 2\frac{m^4}{fg}\cos\gamma$$
$$= \frac{m^4}{f^2g^2}(f^2 + g^2 - 2fg\cos\gamma) = \frac{m^4}{f^2g^2} \cdot c^2,$$

Sie sind auf $2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{a}{2} = 1$ oder auf

$$(14) \qquad (1 - \cos A)(1 + \cos a) = 1$$

zurückführbar. Für $a = 0$ wird $A = 60^0$; wir haben ein unendlich kleines (ebenes) Dreieck vor uns. Für $a = 90^0$ wird auch $A = 90^0$; wir haben das Oktanten-Dreieck; für $A = 120^0$ wird $\cos a = -\frac{1}{3}$. Dieses Dreieck erhalten wir, wenn wir um das Tetraeder eine Kugel beschreiben.

Betrachtet man das Nebendreieck mit den

$$\text{Seiten: } 180^0 - a, \quad 180^0 - b, \quad c,$$
$$\text{Winkeln: } 180^0 - A, \quad 180^0 - B, \quad C,$$

so bleiben die Formeln gültig. Dasselbe gilt für das Polareck. Es hat die

$$\text{Seiten: } 180^0 - A, \quad 180^0 - B, \quad 180^0 - C;$$
$$\text{Winkel: } 180^0 - a, \quad 180^0 - b, \quad 180^0 - c.$$

Diese Übungen geben zu erkennen, daß die Formeln (13) teils sich selbst, teils einander polar sind.

Auf der Kugel sind keine Parallelen möglich. Nehmen wir $A + B = 180^0$, so folgt aus der ersten (13) $a + b = 180^0$. Die übrigen ergeben:

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{c}{2}}, \quad \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin a}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\cos A}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos a}{\sin \frac{c}{2}}.$$

Diese Formeln bestätigt man aus dem Dreieck, dessen Seiten 90^0, a, $\frac{c}{2}$ sind. Der Seite 90^0 liegt der Winkel $180^0 - A$, der Seite $\frac{c}{2}$ der Winkel $\frac{C}{2}$ gegenüber. Dies Dreieck ergibt sich aus dem ursprünglichen durch Hälftung des Winkels C. Der Winkelhalbierer hat die Größe 90^0.

Durch Division erhält man aus (13) (Nepersche Analogien):

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \dfrac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \dfrac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}; \end{cases}$$

daraus endlich

$$(16) \qquad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} : \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}.$$

Sind a, b, C gegeben, so führen (15) zur Kenntnis von A und B. Sind a, b, A oder a, b, B gegeben, so verschafft man sich zunächst durch den Sinussatz a, b, A, B und gelangt durch (15) zur Kenntnis von C.

Man findet noch aus (13) die zu (15) polaren Formeln:

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\cot\frac{c}{2}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}, \\[2ex] \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\cdot\cot\frac{c}{2}=\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}. \end{cases}$$

Diese lösen die Aufgaben, bei welchen A, B, c und A, B, a gegeben sind.

Zur Berechnung des Radius eines Kreises, welcher dem Kugeldreieck ABC einbeschrieben ist, beachte man, daß die von einem Punkte P an einen kleinen Kreis gelegten Tangenten gleich sind. Der kleine Kreis ist Grundkreis eines Kegels, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt. Legt man durch P zwei Ebenen, welche durch den Kugelmittelpunkt gehen und den Kegel berühren, so haben wir in ihren Schnitten mit der Kugel die beiden Hauptkreise, welche den kleinen Kreis berühren. Nun ist nach den Bezeichnungen der Fig. 192:

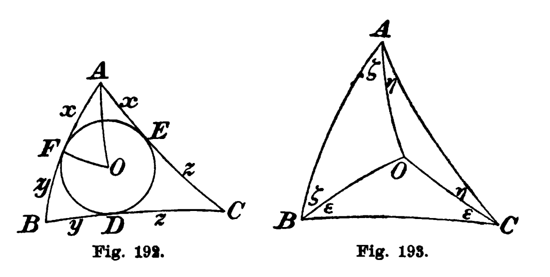


Fig. 192. Fig. 193.

$$2x+2y+2z=2\sigma,$$
$$x=\sigma-a.$$

Deshalb ist im rechtwinkligen Dreieck AFO, in welchem OA der den Winkel A halbierende Hauptkreis ist,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(\sigma-a)}.$$

Es ist aber $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ bereits S. 397, Formel (4) entwickelt. Somit erhalten wir für ϱ die Formel:

$$\operatorname{tg}\varrho\cdot\sin\sigma=\sqrt{\sin\sigma\cdot\sin(\sigma-a)\cdot\sin(\sigma-b)\cdot\sin(\sigma-c)}$$

und damit die geometrische Deutung der Formeln (6).

Für den umbeschriebenen (kleinen) Kreis ergibt sich (Fig. 193)

$$\varepsilon+\eta=C,\quad \varepsilon+\zeta=B,\quad \zeta+\eta=A,$$

daher

$$2\varepsilon' + 2\eta + 2\zeta = A + B + C = 2S,$$
$$\varepsilon' = S - A, \quad \eta = S - B, \quad \zeta = S - C.$$

ε' ist gestrichelt zum Unterschied von ε in (9).

Daher, wenn man aus O auf AB eine Senkrechte fällt,

$$\cos(S - A) = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} r}, \quad \text{wo} \quad r = OA = OB = OC.$$

Daher unter Berufung auf (9)

$$(18) \qquad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{(\cos S - A)\cos(S - B)\cos(S - C)}}.$$

Zur Berechnung der Dreiecksfläche müssen wir

$$A + B + C - 180 = \varepsilon$$

durch die Seiten a, b, c ausdrücken. Multipliziert man die erste und dritte der Gaußschen Gleichungen (13) mit $\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$ und subtrahiert, so folgt:

$$(19) \qquad \cos\frac{A + B + C}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot \sin C.$$

Ersetzt man $\sin C$ durch seinen Wert in den Seiten, so folgt:

$$\cos\frac{A + B + C}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Die rechte Seite ist wie die linke symmetrisch; ihren einfachsten Ausdruck kann sie erst gewinnen, wenn die Kosinus der ganzen Winkel auf die der halben zurückgeführt werden. Wir setzen also

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 \quad \text{usw.}$$

Bildet man dann

$$1 - \cos^2\frac{A + B + C}{2},$$

so gelingt die Ausziehung der Wurzel und es wird (Formel von Gudermann):

$$(20) \qquad \sin\frac{A + B + C}{2} = \frac{-1 + \cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = \cos\frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Bestimmung des Vorzeichens in (20) erfolgt durch die Annahme $a = b = c = 0$, welche $A = B = C = 60^0$ nach sich zieht. Auch $a = b = c = 90^0$, $A = B = C = 90^0$ führt zu gleichem Ziel.

Bilden wir nun $1 + \cos\frac{\varepsilon}{2}$ und $1 - \cos\frac{\varepsilon}{2}$, so entstehen im Zähler Ausdrücke, die mit

$$\left(\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}$$

und

$$-\left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}$$

übereinstimmen. Daraus ergibt sich die Umformung in

$$\left(\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b+c}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right)$$

und

$$\left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{b+c}{2}\right)\left(-\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right);$$

oder

$$(21)\quad \begin{cases} \cos^2\frac{\varepsilon}{4} = \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\sigma-a}{2}\cos\frac{\sigma-b}{2}\cos\frac{\sigma-c}{2} : 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}, \\ \sin^2\frac{\varepsilon}{4} = \sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\sigma-a}{2}\sin\frac{\sigma-b}{2}\sin\frac{\sigma-c}{2} : 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}; \end{cases}$$

endlich durch Division:

$$(22)\qquad \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma-c}{2},$$

$$2\sigma = a + b + c.$$

Dies ist die berühmte Formel von L'Huilier, welche den Inhalt des sphärischen Dreiecks aus den Seiten berechnen läßt.

Für die schönen Untersuchungen, welche Study bezüglich der sphärischen Trigonometrie angestellt hat, sei auf die Enzyklopädie von Weber-Wellstein und die Geschichte der Trigonometrie von Braunmühl verwiesen.

Sachregister.

Berichtigungen und Zusätze.

1. In Fig. 155, S. 336 fehlt die Verbindungslinie *DB*.

2. Zu den Ausführungen S. 176, Zeile 9 von oben ist eine Einschränkung nötig. Vgl. den Hinweis S. 323.

3. Zu den Reihen für π S. 288 wird auf die Arbeit von K. H. Schellbach, Crelles J., Bd. 9 (sein erster wissenschaftlicher Aufsatz, 1832) verwiesen.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.